

15 Novembre mattina

Teorema Siano I e J due intervalli, $f \in C^0(I)$,
 f strettamente ^(decrecente) crescente t.c. $J = f(I)$. Allora, se denoto
con $g: J \rightarrow I$, risulta che g è strettamente ^(decrecente) crescente
e $g \in C^0(J)$.

E.s. x^n $n = 2, 3, \dots$ x^2, x^3, x^4

$x^n: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ x^n e

1) strettamente crescente

2) è suriettivo perché $x^n \in C^0([0, +\infty))$

$0^n = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ quindi è immagine

$\{x^n: x \in [0, +\infty)\} = [0, +\infty)$

3) $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ è l'inverso $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

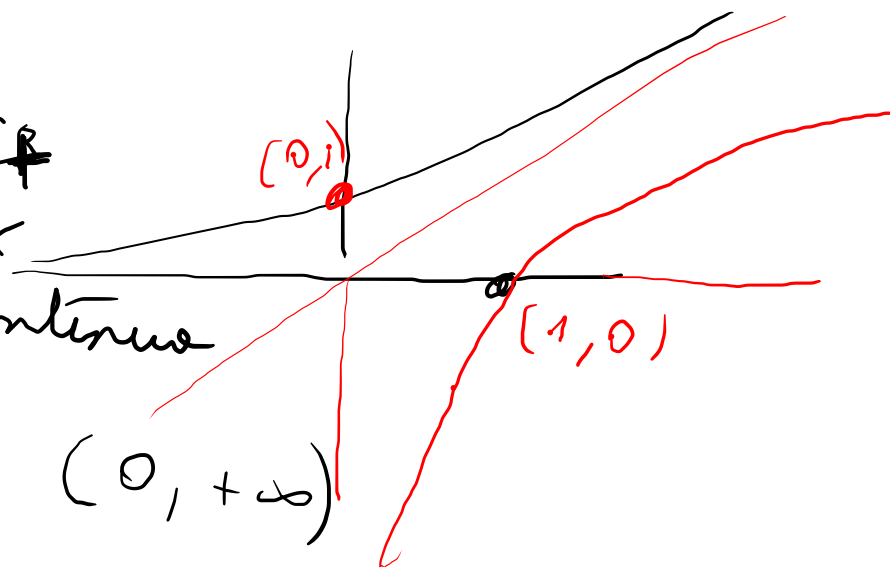
è strettamente crescente ed è continua.

$$b > 1$$

$$b^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

1) b^x è strettamente crescente, continua

$$\{b^x : x \in \mathbb{R}\} \begin{matrix} \sup & +\infty \\ \inf & 0 \end{matrix} = (0, +\infty)$$



2) La funzione inversa $\log_b x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

strettamente crescente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b x = \sup \{ \log_b x : x > 0 \} = \sup \mathbb{R} = +\infty$$

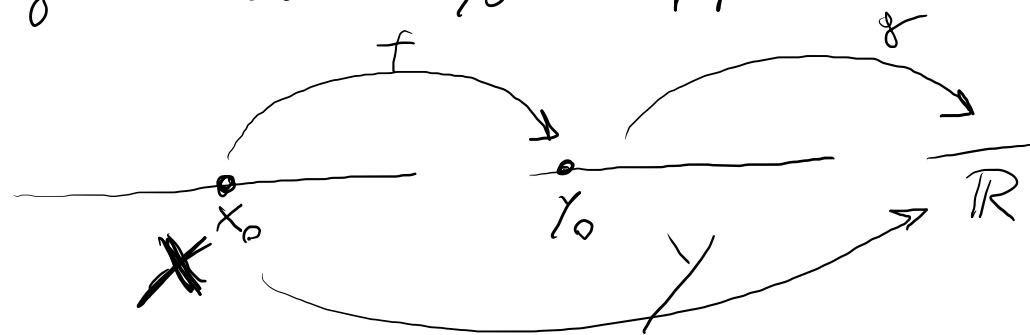
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b x = \inf \mathbb{R} = -\infty$$

Teor $f, g \in C^0(I)$, allora $f+g, fg \in C^0(I)$.
 Se $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$, $\frac{1}{g} \in C^0(I)$

Teor Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$:

e siano $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ con

f continua in x_0 e g continua in y_0 . Supponiamo
 anche che $y_0 = f(x_0)$



Allora $g(f(x))$ è continua in x_0 .

Esempio $\forall a \in \mathbb{R}$, $x^a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, Risultato $x^a \in C^0(\mathbb{R}_+)$

Inoltre $x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$

Quindi $x^a = g(f(x))$ dove

$g(x) = e^x$, $f(x) = a \ln x$. Quindi il

teorema garantisce $x^a \in C^0(\mathbb{R}_+)$

Teor $f: X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$,
 $y_0 = f(x_0)$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$. f continua in x_0 e g continua
in y_0 . Allora $g(f(x))$ è continua in x_0

Dim f continua in x_0 significa

$$1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \delta_\varepsilon^{(1)} > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta_\varepsilon^{(1)} \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

g continua in y_0

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon^{(2)} > 0 \text{ t.c. } |y - y_0| < \delta_\varepsilon^{(2)} \text{ e } y \in Y \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Ma vogliamo dimostrare $g(f(x))$ è continua in x_0 , cioè

$$3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |g(f(x)) - \underbrace{g(f(x_0))}_{y_0}| < \varepsilon.$$

Dalla 2) sappiamo che se

$$|f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}| < \delta_\varepsilon^{(2)} \text{ e } x \in X \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Immaginiamo ora $\delta_\varepsilon^{(2)}$ al posto di ε nella 1.

$$\text{La 1) garantisce che se } |x - x_0| < \delta_{\delta_\varepsilon^{(2)}}^{(1)} \stackrel{1}{\Rightarrow} |f(x) - f(x_0)| < \delta_\varepsilon^{(2)}$$

Potremmo allora $\delta_\varepsilon = \left(\delta_{\delta_\varepsilon^{(2)}}^{(1)} \right)$ aver ottenuto la 3)

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

1) $\Downarrow$

$$|f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}| < \delta_\varepsilon^{(2)}$$

2) $\nearrow$

Esercizio Sia $\{x_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che ha limite.

Dim Se $\{x_n\}$ è contenuta in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora l'enunciato segue da B.W.

Se $\{x_{n_k}\}_k$ è una sottosuccessione e

se $\{x_{n_{k_m}}\}_m$ è una sottosuccessione di $\{x_{n_k}\}_k$,
è anche una sottosuccessione di $\{x_n\}$

$\{x_n\}$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente
 $k \rightarrow n_k = f(k)$

allora per definizione $\{x_{f(k)}\} = \{x_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{x_n\}$

$x_{n_{k_m}}$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $k \rightarrow n_k = f(k)$

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $m \rightarrow k_m = g(m)$

Allora $n_{k_m} = n_{f(k_m)} = n_{f(g(m))}$

$\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$
 $f(g(m))$ è strettamente crescente

Per poter dimostrare che non esistono sottosuccessioni $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ contenute in intervalli chiusi e limitati. Per primo caso estraggo da $\{x_n\}$ una sottosuccessione formata da elementi di segno costante

Questo perché almeno una tra $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$ contiene infinitelementi della successione.

Sia $\{x_{n_k}\}$ $t \leq$ $x_{n_k} \geq 0 \quad \forall k$. Introduco

$y_k = x_{n_k}$, Devo dimostrare che esista

una sottosuccessione $\{y_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ tale $t \leq$ $\lim_{m \rightarrow \infty} y_{k_m} = +\infty$

$\begin{array}{|} \hline \\ \hline \end{array}$
 $0 \quad m$

$\forall m \in \mathbb{N}$, c'è solo un numero finito di elementi di $\{y_k\}$ contenuti in $[0, m]$ e quindi ce ne sono infiniti in $[m, +\infty)$

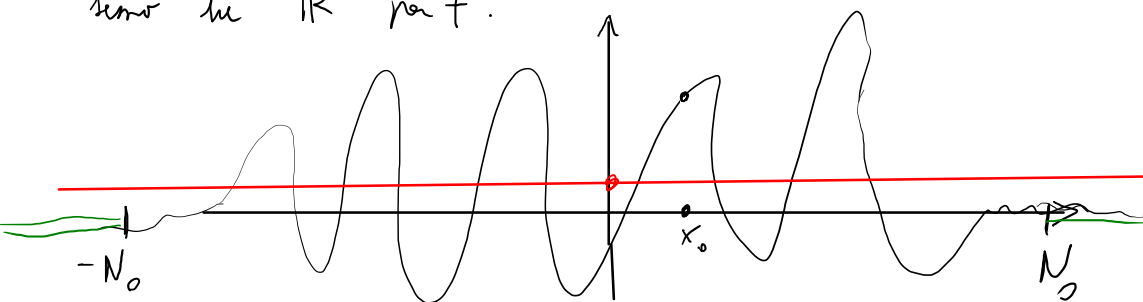
Resto allora definito una sottosuccessione $\{y_{k_m}\}$ di $\{y_k\}$

con $y_{k_m} \geq m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$

e per i condizionali $\lim_{m \rightarrow +\infty} y_{k_m} = +\infty$

E serafico

Esercizio Se $f \in C^0(\mathbb{R})$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$. $f(x_0) > 0$
 e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ allora esiste un punto di massimo in $\mathbb{R}$ per f .



$$\frac{f(x_0)}{4} > 0$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad |x| > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

In particolare, per $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{4}$ e $N_\varepsilon = N_{\frac{f(x_0)}{4}}$

segue che $|f(x)| < \frac{f(x_0)}{4} \quad \forall |x| > N_0$ (e' ovvio che $|x_0| \leq N_0$)

$$\Downarrow$$

$$f(x) < \frac{f(x_0)}{4}$$

Se restringo f in $[-N_0, N_0]$, siccome $f|_{[-N_0, N_0]} \in C^0([-N_0, N_0])$

da W ho che $\exists x_M \in [-N_0, N_0] \in \mathbb{R}$.

$$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall |x| \leq N_0$$

Notare che $x_0 \in [-N_0, N_0] \Rightarrow f(x_M) \geq f(x_0)$.

Siccome per $x \notin [-N_0, N_0]$ ho $f(x) < \frac{f(x_0)}{4} < f(x_0) \leq f(x_M)$

Concludo allora che $f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.