15 Novembre pomeriggio

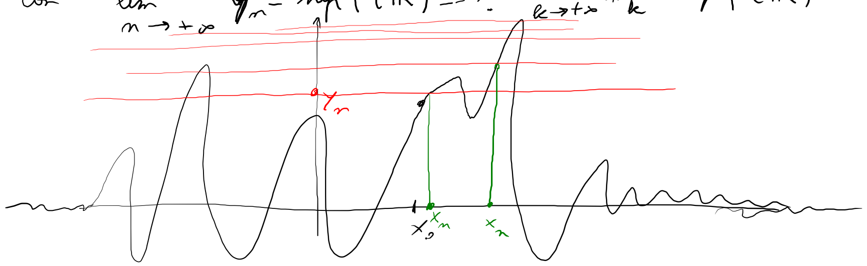
Stamattina abbiamo dato una ~~strategia~~ risposta all'esercizio

$f \in C^0(\mathbb{R})$, $f(x_0) > 0$ per un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Allora $\exists$ un punto di massimo x_M per f $\quad (f(x) \le f(x_M) \quad \forall x \in \mathbb{R})$

Seguiamo la dimostrazione del teor di W.

Come si ricorda, si considerava una successione $\{y_n\}$ in $f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

con $\lim_{n \to +\infty} y_n = \sup f(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \overset{f(x_{n_k})}{\overset{\parallel}{y_{n_k}}} = \sup f(\mathbb{R})$



Resta definita una successione $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ t.c. $f(x_n) = y_n$.

Dall'esercizio di questa mattina so che $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ t.c. $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

Se $L \in \mathbb{R}$ allora risulta che L è un punto di massimo per f.

Questo perché $\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \sup f(\mathbb{R})$

ma anche $\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{x \to L} f(x) = f(L)$

Pertanto $f(L) = \sup f(\mathbb{R}) \iff L$ è un punto di massimo

Per concludere non ci resta che escludere i casi $L = \pm\infty$

Se fosse $L = +\infty$ allora $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = +\infty$

$$\left.\begin{aligned} &\text{So che } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = 0 \\ &\text{So che } \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \sup f(\mathbb{R}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sup f(\mathbb{R}) = 0$$

$0 < f(x_0) \le \sup f(\mathbb{R}) \le 0 \Rightarrow 0 < 0$ Assurdo

$L = +\infty$ è escluso ed in modo analogo $L = -\infty$ è escluso.

Lemma $\lim_{y \to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$

Dim $y = \frac{1}{x}$

$$\frac{\lg(1+y)}{y} = \frac{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = \lim_{x \to \infty} \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \to e} \lg z =$$

$$z = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad = \lg e = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

<u>Lemma</u> $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

<u>Dim</u> $y = e^x - 1$ $e^x = y + 1$ $x = \lg(y+1)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\lg(1+y)} = 1$$

<u>Lemma</u> $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

<u>Def</u> Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e siano $x, x_0 \in X$ distinti. La quantità $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ è l' "incremento" di f da x_0 a x. Il corrispondente rapporto incrementale è

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

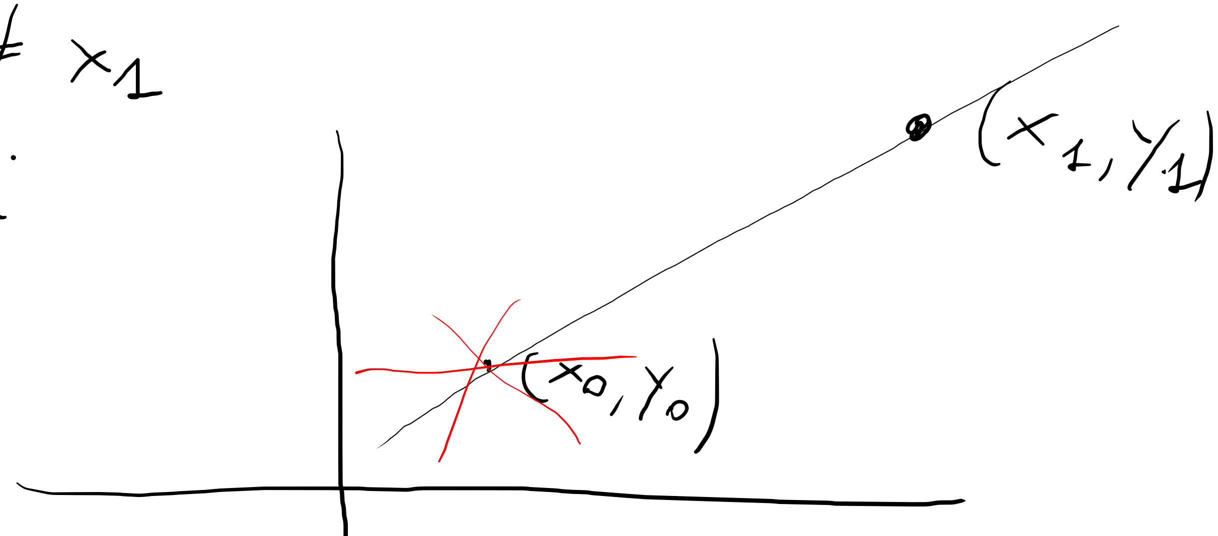
Se pongo $\Delta x = x - x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

<u>Esempio</u> Se ho una funzione $[t_0, t_1] \ni t \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ che rappresenta il moto di un punto mobile sulla retta, la velocità media $\dfrac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \dfrac{x(t_0) - x(t_1)}{t_0 - t_1}$

<u>Esempio</u> $[t_0, t_1] \ni t \longrightarrow n(t) \in \mathbb{R}$ descrive la popolazione il tasso medio di crescita è $\dfrac{n(t_1) - n(t_0)}{t_1 - t_0}$.

Lemma Se (x_0, y_0) e (x_1, y_1) sono due punti del piano e se $x_0 \neq x_1$ la retta che li contiene ha equazione



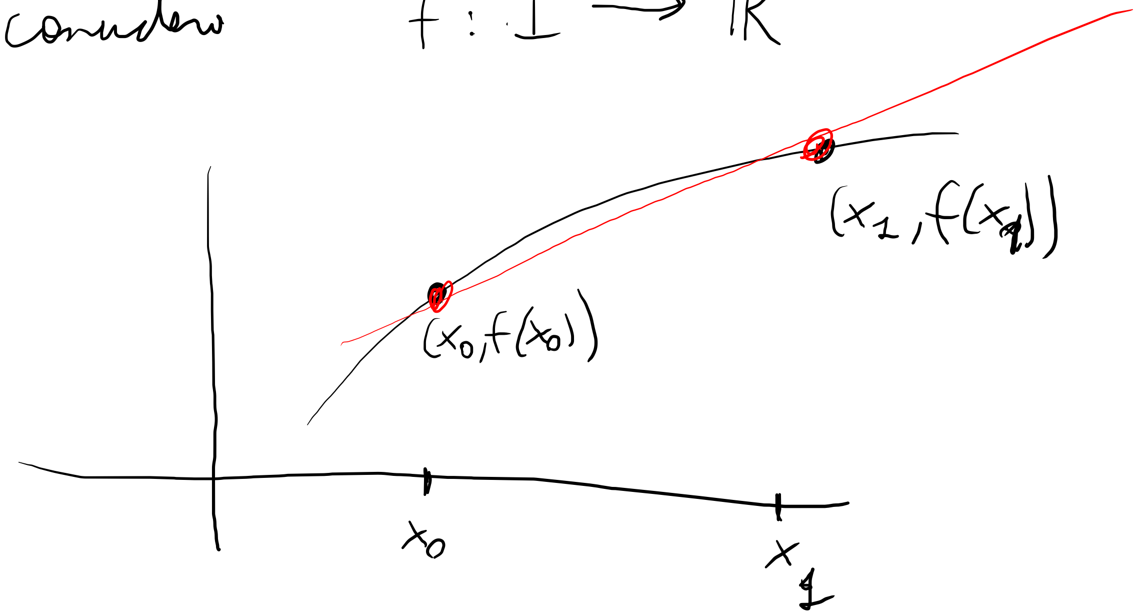
$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Dim Si considera la generica retta per (x_0, y_0)

$y - y_0 = m(x - x_0)$. Ora si tratta di trovare il valore di m che da la retta che passa anche per (x_1, y_1)

$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0) \Longrightarrow m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Se ora considero $f : I \to \mathbb{R}$



L'equazione della retta per i due punti sul grafico è

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Def $f : I \to \mathbb{R}$ I intervallo aperto, $x_0 \in I$

Se il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ esiste ed è finito

allora diciamo che la f è derivabile o differenziabile in x_0 [illegible] con denoto il valore del limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

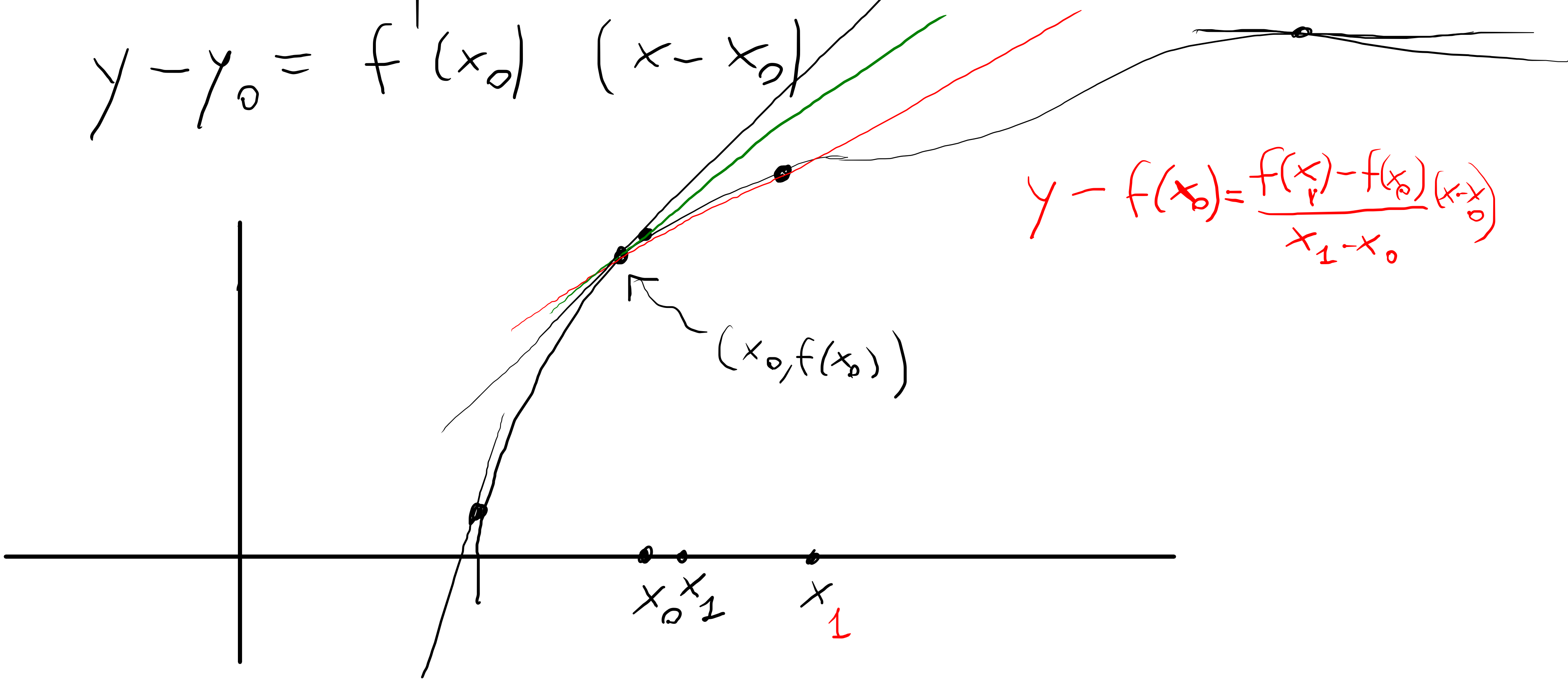
$$f'(x_0)$$

$$f^{(1)}(x_0)$$

Def Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ t.c. $f'(x_0)$ esiste

Definiamo retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ la retta di equazione

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$



$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$[t_0, t_1] \ni t \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

$t_0 < t_2 < t_1$ se esiste $\displaystyle\lim_{t \to t_2} \frac{x(t) - x(t_2)}{t - t_2} = x'(t_2)$

$x'(t_2)$ è la velocità istantanea al momento t_2.

Calcoliamo qualche derivata

<u>Esempi</u> Se $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione costante

$$(c)' = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c(x) - c(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

<u>Esempi</u> $(e^x)' = e^x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{e^{x_0} e^h}{e^{x_0+h}} - e^{x_0}}{h} =$$

$x = h + x_0$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{e^{x_0}}_{\downarrow\, e^{x_0}} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\downarrow\, 1,\ h \to 0} = e^{x_0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$