Corso di ALEG
Quinto foglio di esercizi
Prof. Valentina Beorchia

November 17, 2022

1. Si determini se i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
siano linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

2. Si determini se i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
siano linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

3. Si determinino i valori del parametro t per cui i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
risultano linearmente indipendenti.

4. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e siano v_1, v_2 due vettori linearmente indipendenti di V. Si dimostri che $v_1 + v_2$, $v_1 - v_2$ sono ancora linearmente indipendenti.

5.
   - Sia $A \in M_{3,4}$ la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \\ 6 & 2 & 20 & 4 \end{pmatrix}.$$
     Usando l'algoritmo di Gauss, si determini il rango di A.

- Si scriva la trasposta ${}^tA \in M_{4,3}$ di A e si calcoli il suo rango, usando l'algoritmo di Gauss.

6. Usando l'algoritmo di Gauss, si determini il rango r di ciascuna delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici, usando la regola di Sarrus e poi usando una formula di Laplace a piacere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi & 2 & 0 \\ 0 & -\pi & 1 \\ 2\pi & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2.2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2.3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Usando le operazioni elementari si determini l'inversa delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Usando la formula di Cramer si risolvino i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 & = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = -1 \\ x_1 - x_2 & = 1 \end{cases}$$

10. Usando la formula di Cramer e una calcolatrice si risolva il seguente problema del Page Rank:

$$\begin{cases} x_1 & = 0.85\left(\frac{x_2}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_2 & = 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_3 & = 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_4 & = 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + x_3\right) + \frac{0.15}{4} \end{cases}$$