Lezione 7 novembre 22

lunedì 7 novembre 2022 09:05

Visto: l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_k$:

$$W = \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \quad \text{è SSV.}$$

I vettori $v_1, \dots, v_k$ si dicono GENERATORI DI W.

oss. Nel caso $V = \mathbb{K}^n$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \dots)$ decidere se $v_1, \dots, v_k$ sono generatori per $\mathbb{K}^n$ si può tradurre in problema di SL:

infatti: $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$

Sia $v \in \mathbb{K}^n$, $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \iff$

$\exists \ \underline{c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}}$ t.c.

$v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$, cioè

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + c_k \cdot \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 a_{11} + \dots + c_k a_{1k} \\ c_1 a_{21} + \dots + c_k a_{2k} \\ \vdots \\ c_1 a_{n1} + \dots + c_k a_{nk} \end{pmatrix} \quad n \times 1$$

$$= \underbrace{\underset{\substack{\parallel \\ A}}{\underset{n \times k}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}}} \cdot \underset{k \times 1}{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}}}$$

$n \times 1$

Quindi: v è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \text{ t.c.}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{il SL} \quad \underset{n \times k}{A} \cdot X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \qquad \text{è compatibile}$$

Esercizi: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori per $\mathbb{K}^2$; infatti:

sia $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ arbitrario; si ha

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

ogni vettore di $\mathbb{K}^2$ si può scrivere come combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Anche: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{+}{,} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{=}{,} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

è ins. di generatori per $\mathbb{K}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(b - \frac{a}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b - a/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

* * *

DIPENDENZA & INDIP. LINEARE

Def.: Siano $v_1, .., v_k \in V$. Si dicono **LIN. DIPENDENTI** se uno di loro è combinaz. lineare degli altri.

Es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. DIP.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Es.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti

infatti:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Def.: $v_1, .., v_k$ sono **LIN. INDIP.** se NON sono lin. dipendenti.

Es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono LIN. INDIP.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono LINEAR. INDIP.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono LIN. INDIP.

INFATTI : Due vettori v_1 e v_2 sono LIN. DIP. $\Leftrightarrow$

$v_1 = c \cdot v_2$ oppure $v_2 = c \cdot v_1$, cioè $\Leftrightarrow$ sono proporzionali

Allora vediamo che $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ non sono proporzionali:

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}1=0\\0=c\end{cases}$ impossibile

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0=c\\1=0\end{cases}$ impossibile

Vediamo ora che $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ NON sono proporzionali

$c \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}c=1\\c=2\end{cases}$ impossibile

Analogamente:

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix}3=c\\4=c\end{matrix} \quad \text{imposs.})$$

PROPOSIZIONE : $v_1, \dots, v_k$ sono LIN. DIP. $\Leftrightarrow$

esiste una comb. lineare, a coeff. non tutti nulli, che dia il vettore nullo:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0, \quad a_i \in K$$

a_i NON tutti nulli

Dim. : Se sono dipendenti:

$$v_j = a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_j + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_k v_k$$

$$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_j \boxed{-v_j} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_k v_k = 0$$

$$= (-1) \cdot v_j$$

$$\neq 0$$

Viceversa : supp.

$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$, sia $a_j \neq 0$

$$a_j \cdot v_j = -a_1 v_1 - \dots - a_k v_k \quad / \cdot (a_j)^{-1}$$

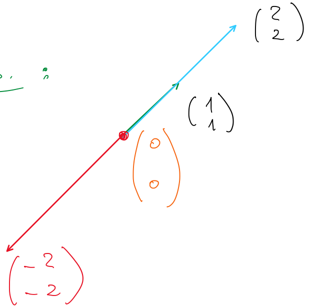
$$v_j = -a_1 \cdot (a_j)^{-1} v_1 - \dots - a_k \cdot (a_j)^{-1} \cdot v_k$$

CONSEGUENZA: $v_1, \dots, v_k$ sono LIN. INDIP.

$\Longleftrightarrow$ l'unica comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$ che dia il vettore nullo, è quella con i coeff. TUTTI NULLI:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \implies a_1 = \dots = a_k = 0$$

Es.:



$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti, e si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

OSS.: Anche la dipendenza e indipendenza lineare si possono tradurre in termini di SL:

$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$ sono lin. dip. $\Longleftrightarrow$

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0 \quad , \quad c_i \text{ non tutti nulli}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

come prima, se pongo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff$ $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$ è soluzione di $A \cdot X = 0$

Quindi: i vettori sono LIN. DIP $\iff$ $\exists$ soluzione non nulla di $A \cdot X = 0$

sono LIN. INDIP. $\iff$ $A \cdot X = 0$ ha solo la soluz. nulla.

* * *

Vedremo in seguito che da un insieme di generatori è sempre possibile estrarre un sottoinsieme MINIMALE di generatori; tale sottoinsieme avrà la proprietà di essere formato da vettori LIN. INDIPENDENTI.

Def.: Un insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice **BASE** di V se:

B1 $v_1, \dots, v_n$ sono generatori per V

B2 $v_1, \dots, v_n$ sono LIN. INDIP.

PROP.: Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ vettori di V

Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una BASE di V

$\Longleftrightarrow$ $\forall\, v \in V$, v si può scrivere in modo UNICO come combinaz. lineare di $v_1, \dots, v_n$.

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

In questo caso, $(c_1, \dots, c_n)$ si dicono COORDINATE DI v NELLA BASE $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Dim.:

Supp. $\{v_1, \dots, v_n\}$ base; sono generatori e linearmente indipendenti.

sia $v \in V$; $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

perché generatori per V

Supp. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$\Longrightarrow \underbrace{(c_1 - a_1)}_{\in \mathbb{K}} v_1 + \dots + \underbrace{(c_n - a_n)}_{\in \mathbb{K}} v_n = 0$$

$v_1, \dots, v_n$ LIN. INDIP. $\Longrightarrow \begin{cases} c_1 - a_1 = 0 \\ c_2 - a_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n - a_n = 0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = a_1 \\ c_2 = a_2 \\ \vdots \\ c_n = a_n \end{cases}$$

Viceversa: Supp. ogni vettore v è combinazione lineare unica di $v_1, \dots, v_n$

in particolare, $\forall v \in V$,

$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \Longrightarrow v_1, \dots, v_n$ generano V

Cons. ora $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$

osservo $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$

Sono due espressioni del vettore nullo 0 come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$; per l'ipotesi di unicità, si ha:

$$a_1 = 0 \,, \dots , \; a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1, \dots, v_n \text{ sono}$$

lin. indip.

Esempio:

$$\underset{=v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \; \underset{=v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \; \underset{=v_3}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

non formano base di $\mathbb{R}^2$ (fallisce (B2))

e infatti non c'è unicità di espressione di un dato vettore come combinazione lineare dei 3 vettori; ad esempio:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Abbiamo trovato 3 espressioni diverse. Verifichiamolo anche con il metodo dei sistemi lineari:

$$\underbrace{\underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} \overset{\overset{v_1}{\downarrow}}{1} & \overset{\overset{v_2}{\downarrow}}{1} & \overset{\overset{v_3}{\downarrow}}{3} \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

I coefficienti delle combinazione lineare sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \enclose{circle}{1} & 1 & 3 & 4 \\ \enclose{circle}{1} & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) = (A|b)$$

$$II \rightsquigarrow II - I \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \text{ è compatibile}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad x_3 = t$$

$$x_2 = 2 - t, \qquad x_1 = 4 - 2 + t - 3t = 2 - 2t$$

$$\text{gen. soluz.} \begin{pmatrix} 2 - 2t \\ 2 - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ ci sono ∞ terne $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$ uno per ogni scelta di $t \in \mathbb{R}$;

Ad esempio: $t = 1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t = 2 : \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$t = 0 : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esempi di basi:

① $V = \mathbb{K}^n \ni v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= e_n} \right\}$$

generano $\mathbb{K}^n$

sono LIN. INDIP.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

$$A \cdot X = 0$$

$$\underbrace{I_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluz. nulla

$\Longrightarrow$ $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ BASE CANONICA di $\mathbb{K}^n$

In particolare: base di $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esempio ②

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Cons. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si può che sono LIN. INDIP

$\Longrightarrow$ è una base, E_{ij} : 1 in pos. ij
0 altrimenti

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \underset{ij}{\downarrow} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$