Lezione 14 novembre 22

lunedì 14 novembre 2022 09:12

Abbiamo visto la nozione di RANGO DI UNA MATRICE:

$$\mathrm{rg}\, A := \dim \underbrace{\mathrm{Span}\,(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)})}_{\text{sottospazio generato dalle colonne di } A}$$

Teo. RC (Rouché - Capelli)

Un SL $A \cdot x = b$ è compatibile

$\iff \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, (A|b)$

Inoltre: se $A \cdot x = b$ è compatibile, allora la generica soluzione s dipende da $n - \mathrm{rg}(A)$ parametri liberi, dove $n = \#$ incognite.

Teorema di Dimensione:

Sia $A \cdot x = 0$, e sia W l'insieme delle soluzioni: $W \subseteq \mathbb{K}^n$

Abbiamo visto che W è un sottospazio vettoriale.

Allora: $\dim W = n - \mathrm{rg}(A)$.

Dim. useremo applicazioni lineari.
Vedremo in seguito.

Dim. della seconda parte di RC è:

uso Teo. di struttura per soluzioni

di SL: sia $\tilde{s}$ una soluz. part. di $A \cdot X = b$; ogni soluzione è

$$s = \check{s} + s_0 \qquad \text{con} \qquad s_0 \in W$$

$$A \cdot s_0 = 0$$

$\dim W = n - rg(A)$; $rg(A) = r$

fisso una base di W:

$w_1, \dots, w_{n-r}$

$s_0 \in W$, $s_0 = t_1 w_1 + \dots + t_{n-r} w_{n-r}$

con $t_i \in \mathbb{K}$ coeff.

$$\Rightarrow \boxed{s = \check{s} + t_1 w_1 + \dots + t_{n-r} w_{n-r}}$$

Se vario $t_1, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{K}$

ottengo TUTTE le soluzioni s

Esempio:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \Rightarrow & x_1 = 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 1 = 2x_2 - 3x_3 + x_2 - 2 + 1 = 3x_2 - 3x_3 - 1 \\ x_2 - x_4 = 2 \Rightarrow & x_4 = x_2 - 2 \end{cases}$$

è compatibile?

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} \enclose{circle}{1} & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \enclose{circle}{1} & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)}_{(A|b)}$$

con A = le prime quattro colonne:

$$\underbrace{\begin{matrix} \enclose{circle}{1} & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \enclose{circle}{1} & 0 & -1 \end{matrix}}_{A}$$

Osservo che sia la matrice dei coefficienti, sia la matrice completa, sono entrambe a scala.
Abbiamo visto che in questo caso: rango = # righe non nulle
= # pivot

$\mathrm{rg}\, A = \#$ righe non nulle $= 2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$ i due ranghi sono uguali

$\mathrm{rg}\,(A|b) = \#$ righe non nulle $= 2$

$\underset{RC}{\Longrightarrow}$ è compatibile, e la

gen. soluzione $s = \tilde{s} + s_0$

Cerchiamo di determinare $\tilde{s}$ e s_0 concretamente.

Per sostituzione, dal SL trovo:

$$x_1 = 3x_2 - 3x_3 - 1$$

$$x_4 = x_2 - 2$$

incognite libere: x_2 e x_3

Pongo:

$$x_2 = t_1, \qquad x_3 = t_2$$

$$\Longrightarrow \quad s = \begin{pmatrix} 3t_1 - 3t_2 - 1 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_1 - 2 \end{pmatrix} \quad \circledast$$

RC: $n - \mathrm{rg}\,(A)$ parametri liberi; nel nostro caso:

$$\underset{=n}{4} - \underset{=\mathrm{rg}}{2} = 2 \quad \text{ok!}$$

Una soluzione particolare del SL si trova calcolando $\circledast$ in valori fissati per i parametri t_1 e t_2; ci sono infinite scelte; la scelta più economica è:

$$\tilde{s}: \ t_1 = 0, \ t_2 = 0 \qquad \tilde{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Per scrivere s nella forma $\tilde{s} + s_0 = s$, pongo $s_0 = s - \tilde{s}$

quindi: $s_0 = \begin{pmatrix} 3t_1 - 3t_2 - 1 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_1 - 2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow S = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3t_1 - 3t_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix}}$$

ora voglio esprimere questi vettori come $t_1 \cdot$ (primo vettore della base di W) + $t_2 \cdot$ (secondo vettore della base di W)

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t_1 \\ t_1 \\ 0 \\ t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t_2 \\ 0 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + t_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

sono vettori linearmente indipendenti e formano una base di W.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 5x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \end{array}\right)}_{(A|b)} \qquad \text{con } \underbrace{\begin{matrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{matrix}}_{A}$$

$rg\, A \leq 2$

$rg\, (A|b) \leq 3$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{2} & 3/2 \\ \boxed{3} & 2 & 5 \\ \boxed{5} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{III - 5 \cdot I}{\xrightarrow{II - 3 \cdot I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 19/2 & 1/2 \\ 0 & 23/2 & -13/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{2 \cdot III \quad 2 \cdot I}{\xrightarrow{2 \cdot II}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 19 & 1 \\ 0 & \boxed{23} & -13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III - \frac{23}{19} II} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & -5 & 3 \\ 0 & \boxed{19} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{270}{19}} \end{array}\right)$$

⚠ controllare i conti!

$\mathrm{rg}\, A = 2$

$\neq$

$\mathrm{rg}\,(A|b) = 3 \implies$ non è compatibile

RANGO E INVERTIBILITÀ di matrici

Esempio: visto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dim \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{!}{=} \dim \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

invece $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

è invertibile

$$\dim \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2$$

Teor. $A \in M_n(K)$ è invertibile $\iff$ $\mathrm{rg}\, A$ è massimo, cioè $\mathrm{rg}\, A = n$

Dim.: Supp. A invertibile $\implies$

$\exists\, M : \underbrace{A \cdot M = I_n}_{= M \cdot A}$; in particolare :

$$A_{(1)} \cdot M^{(1)} = \delta_{11} = 1$$

$$A_{(2)} \cdot M^{(1)} = \delta_{21} = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_{(n)} \cdot M^{(1)} = \delta_{n1} = 0$$

Cioè :

$$\begin{cases} A \cdot M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \implies M^{(1)} \text{ è soluz. di } A \cdot x = e_1 \\ \vdots \\ A \cdot M^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_n \implies M^{(n)} \text{ è soluz. di } A \cdot X = e_n \end{cases}$$

Quindi:

M esiste $\iff$ i SL: $\begin{cases} A \cdot X = e_1 \\ A \cdot X = e_2 \\ \vdots \\ A \cdot X = e_n \end{cases}$

sono tutti compatibili $\iff$

$$e_j \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \quad \forall\, j = 1, \dots, n$$

(per ch RC abbiamo visto che

$A \cdot X = b$ è compatibile $\iff$

$b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$)

$$\implies \underbrace{\text{Span}(e_1, \dots, e_n)}_{= \mathbb{K}^n} \leq \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq \mathbb{K}^n$$

$$\implies \dim \mathbb{K}^n = n = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$

$$= \text{rg}\, A$$

Viceversa: supp. $\text{rg}\, A = n$

trovare l'inversa M equivale a

risolvere i SL

$$\begin{cases} A \cdot x = e_1 \\ \vdots \\ A \cdot x = e_n \end{cases}$$

$\underbrace{(A \mid e_1)}_{n \times (n+1)}$ $\quad rg A = n$

$rg A \le rg (A \mid e_1) \le n$

$\Rightarrow rg (A \mid e_1) = n$

$\Rightarrow$ RC $A \cdot x = e_1$ compatibile

$$\downarrow$$

$rg A = n \quad =$

$rg A \le rg (A \mid e_n) \le n \quad \Rightarrow rg (A \mid e_n) = n$

$\Rightarrow$ tutti i sistemi lineari sono compatibili, e le loro soluzioni formano le colonne di $M = A^{-1}$.

APPLICAZIONE: CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA CON OPERAZ. ELEMENTARI

Supp. $A \in M_n(K)$ sia invertibile

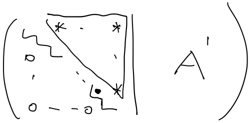
PROB. Calcolare $A^{-1} = M$

Visto: devo risolvere n SL:

$$\begin{cases} A\cdot X = e_1 \\ A\cdot X = e_2 \\ \quad\vdots \\ A\cdot X = e_n \end{cases}$$

$$\left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right)$$

$$\xrightarrow{OE}$$



$$\xrightarrow{\boxed{OE1}} \left(\begin{matrix} 0 & - & - & \bullet & * & * \\ 0 & & - & & \bullet & * \\ 0 & \cdot & \cdot & & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \quad \right) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & - & - & - & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & - & - & - & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; A^{-1} \right)$$

$(n-1)$-riga $-$ $a_{n-1\,n}\cdot$ n-riga

$= \mathbb{I}_n$

A sinistra troviamo propriopio A^{-1}

infatti: OE non cambiano le soluzioni di un SL

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ & & & \\ 0 & - & - & 1 \end{matrix}} \;\middle|\; \begin{matrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 = m_{11} \\ x_2 = m_{21} \\ \vdots \\ x_n = m_{n1} \end{cases}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg} A = 2$$

$$\left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{II - I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \textcircled{2} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{I - 2 \cdot II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{matrix}} = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ok!