Lezione 16 novembre 22

mercoledì 16 novembre 2022 08:13

DETERMINANTE

Vogliamo def. un numero (determinante) associato a una matrice quadrata, che ci darà criterio per invertibilità.

CASO PARTICOLARE: $A \in M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

oss. Supp. che $A = O$ matrice nulla

$\det O = 0$

Supp. che $rg\, A = 1$

quindi le colonne sono LIN. DIP., cioè proporzionali

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} \\ c \cdot a_{21} \end{pmatrix}$$

cioè: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & c \cdot a_{11} \\ a_{21} & c \cdot a_{21} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11} \cdot c \cdot a_{21} - c \cdot a_{11} \cdot a_{21} = 0.$$

$\Longrightarrow$ $rg\, A = 1$, allora $\det A = 0$.

OSS.: Cons. $B := \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ di rango qualunque

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{= \det A} & \overset{=0}{-a_{11} a_{12} + a_{12} \cdot a_{11}} \\ \underbrace{a_{21} a_{22} - a_{22} a_{21}}_{=0} & -a_{21} a_{12} + a_{22} a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}^{= \det A}$$

$$\| \qquad = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi: se $\det A \neq 0$

abbiamo $\frac{1}{\det A} A \cdot B = \frac{\det A}{\det A} \cdot \mathbb{I}_2$

ovvero: $A \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\det A} \cdot B\right)}_{= M} = \mathbb{I}_2$

analogamente: verificare che

$$B \cdot A = \det A \cdot \mathbb{I}_2$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\det A} \cdot B\right)}_{M} \cdot A = \mathbb{I}_2$$

$\Longrightarrow$ A è invertibile, è

$$M = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot B$$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{rg} A = 2$

Vedremo: A è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg} A$ è massimo

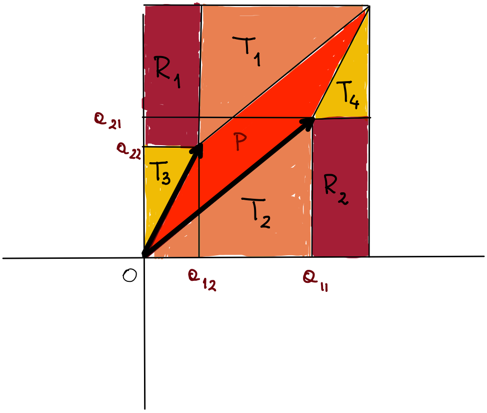
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL DET:

Supp. per semplicità $a_{ij} > 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Area P = ?

Cons. i 2 vettori colonna



$$\begin{aligned}
\text{Area } P = {} & \text{Area (rettangolo grande)} \\
& - \text{Area}(R_1) - \text{Area}(R_2) - \\
& - \text{Area}(T_1) - \text{Area}(T_2) - \\
& - \text{Area}(T_3) - \text{Area}(T_4)
\end{aligned}$$

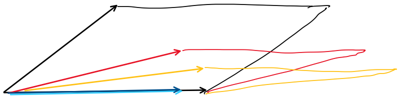
$$\begin{aligned}
= {} & (a_{11} + a_{12}) \cdot (a_{21} + a_{22}) \\
& - 2\,(a_{12} \cdot a_{21}) \\
& - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\, a_{11} \cdot a_{21} \\
& - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot a_{12} \cdot a_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \cancel{a_{11}\, a_{21}} + a_{11}\, a_{22} + a_{12}\, a_{21} + \cancel{a_{12}\, a_{22}} \\
& - 2\, a_{12}\, a_{21} - \cancel{a_{11}\, a_{21}} - \cancel{a_{12}\, a_{22}}
\end{aligned}$$

$$= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = \det A$$

In generale è possibile dimostrare che

$$|\det A| = \text{area parallelogramma sopra i vettori colonna, se i vettori colonna non sono proporzionali}$$



Se i vettori sono proporzionali, il parallelogramma degenera a un segmento; la sua area è 0, compatibilmente con il fatto che il determinante è 0.

DEF. RICORSIVA DI DETERMINANTE

Def: $A \in M_n(\mathbb{K})$; denotiamo

$$A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$$

la sottomatrice ottenuta da A togliendo la riga i e la colonna j. A_{ij} si dice MINORE.

es. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Def. di determinante: $A \in M_n(\mathbb{K})$

- se $n=1$, $A=(a_{11})$, pongo $\det A = a_{11}$
- se $n>1$, pongo

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $n=2$

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det \boxed{A_{11}} + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \det A_{21}$$

$$= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Esempio: $n=3$

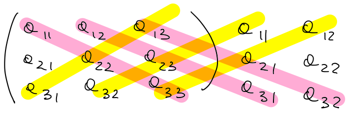
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det \boxed{A_{11}} + (-1)^{2+1} a_{21} \cdot \det \boxed{A_{21}} + (-1)^{3+1} a_{31} \cdot \det \boxed{A_{31}}$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{13}\, a_{32} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23}$$

$$- a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} - a_{31}\, a_{13}\, a_{22}$$

REGOLA DI SARRUS per matrici 3×3


a_{11} a_{12} a_{13} a_{11} a_{12}
a_{21} a_{22} a_{23} a_{21} a_{22}
a_{31} a_{32} a_{33} a_{31} a_{32}

Affianchiamo alla matrice 3×3 le prime 2 colonne e cons. le 6 diagonali in figura; moltiplichiamo gli elementi su ogni diagonale, poi sommiamo i prodotti ottenuti sulle diagonali NO - SE nord ovest – sud est, e togliamo i prodotti sulle diagonali SO - NE sud ovest – nord est