Lezione 16 — Rango

Lemma Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_k \in V$.
Allora $\operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_k)$
per ogni $i \neq j = 1, \dots, k$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Dim Poniamo $w_s = \begin{cases} v_s & \text{se } s \neq j \\ v_j + \lambda v_i & \text{se } s = j \end{cases}$

$w_1, \dots, w_k \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k) \subset \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$

$w_j = v_j + \lambda v_i \Rightarrow v_j = w_j - \lambda w_i \in \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k)$

D'altra parte $v_s = w_s \ \forall s \neq j \Rightarrow \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) \subset \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k)$.

Le due inclusioni implicano l'uguaglianza.

OSS Ne segue che le <u>operazioni elementari</u> su $(v_1, \dots, v_k)$ non cambiano lo $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$:

I tipo) Scambio di v_i con v_j, $i \neq j$

II tipo) moltiplicare v_i per uno scalare $\lambda \neq 0$

III tipo) Sommare a v_j un multiplo di v_i, $i \neq j$.

Def Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice. Il sottospazio vettoriale

$$\operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \subset \mathbb{K}^n$$

generato dalle righe di A è detto <u>spazio delle righe</u>.

Il sottospazio vettoriale

$$\operatorname{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}) \subset \mathbb{K}^m$$

generato dalle colonne di A è detto <u>spazio delle colonne</u>.

Def Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Definiamo il rango di A come

$$rg\, A := \dim \operatorname{Span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$$

cioè la dimensione dello spazio delle colonne di A.

NB In vari libri questo è chiamato rango per colonne: $rg_c A := rg\, A$

Analogamente si definisce il rango per righe

$$rg_r A := \dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}).$$

Usiamo $rg_r A$ come concetto ausiliario prima di dimostrare $rg_r A = rg\, A$.

Lemma Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a gradini. Allora $rg_r A$ è uguale al numero di pivot.

Dim Sia $k = \#\text{pivot}(A)$. Le prime k righe sono non nulle mentre le righe successive sono nulle.

$k = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow rg_r A = 0$. Se $k > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & a_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & a_{kj_k} & \cdots \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{a_{1j_1}, \dots, a_{kj_k}}_{\text{pivot di } A} \neq 0$$

$A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ generano lo spazio delle righe.

$$A^{(1)} x_1 + \cdots + A^{(k)} x_k = 0$$

$$\begin{cases} a_{1j_1} x_1 = 0 \\ a_{1j_2} x_1 + a_{2j_2} x_2 = 0 \\ \cdots \\ a_{kj_1} x_1 + \cdots + a_{kj_k} x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow A^{(1)}, \dots, A^{(k)} \text{ lin. indip.}$$

$$\Rightarrow rg\, A = k.$$