

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI  
A.A. 2021/2022

4 febbraio 2022

**Nome e Cognome:**

**gruppo:** Gruppo A

**esercizio:** Esercizio 1

**Note:** Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Solutione

**Domanda 1**

Si vuole stimare la grandezza incognita  $\vartheta$  facendo uso di due osservazioni contemporanee

$$\begin{cases} d_1 = \vartheta + e_1 \\ d_2 = \vartheta + e_2 \end{cases}$$

dove  $e_1$  ed  $e_2$  sono variabili aleatorie a valore atteso nullo e varianza rispettivamente pari a

$$e_1 \Leftrightarrow E(e_1) = 0, \text{ var}(e_1) = \sigma_1^2 = 1$$

$$e_2 \Leftrightarrow E(e_2) = 0, \text{ var}(e_2) = \sigma_2^2 = 4$$

Vale inoltre che

$$\text{cov}(e_1, e_2) = \sigma_{12} = 0.75$$

e per la grandezza incognita

$$\vartheta \Leftrightarrow E(\vartheta) = 3, \text{ var}(\vartheta) = \sigma_\vartheta^2 = 2$$

Si vuole utilizzare lo stimatore dato da

$$\hat{\vartheta} = \frac{\left(\frac{d_1}{\sigma_1^2} + \frac{d_2}{\sigma_2^2}\right)}{\lambda} \quad \text{dove} \quad \lambda = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$$

Si chiede di

- (a) calcolare la polarizzazione della stima  $\hat{\vartheta}$ ;
- (b) la varianza del relativo errore di stima;
- (c) uno stimatore lineare non polarizzato che assicuri una varianza dell'errore di stima inferiore (se possibile) a quella determinata in risposta alla domanda precedente. **Motivare la risposta.**

Risultato  $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \left( \frac{d_1}{\sigma_1^2} + \frac{d_2}{\sigma_2^2} \right) \cdot$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

$$L_0 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$= d_1 \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + d_2 \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} =$$

$$= \frac{4}{5} d_1 + \frac{1}{5} d_2$$

$$\alpha + \beta = 1$$

a) errore di poliritensione / stima

$$E[\theta - \hat{\theta}] = E[\theta] - E[\hat{\theta}] = \bar{\theta} - \bar{\theta} = 0$$

$$E[\hat{\theta}] = \alpha E[d_1] + \beta E[d_2] = (\alpha + \beta) \bar{\theta} = \bar{\theta}$$

b) varianze dell'errore di stima

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 = E[\hat{\theta}^2] - (E[\hat{\theta}])^2 = E\left[ \left( \alpha(\theta + e_1) + \beta(\theta + e_2) \right)^2 \right] - \bar{\theta}^2$$

$$= \alpha^2 E[(\theta + e_1)^2] + \beta^2 E[(\theta + e_2)^2] + 2\alpha\beta E[(\theta + e_1)(\theta + e_2)] =$$

$$= \frac{16}{75} \left\{ E(\theta^2) + 2E(\theta e_1) + E(e_1^2) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{75} \left\{ E(\theta^2) + 2E(\theta e_2) + E(e_2^2) \right\} +$$

$$+ \frac{8}{75} E \left\{ \theta^2 + \theta e_1 + \theta e_2 + e_1 e_2 \right\} - \bar{\theta}^2$$

$$= \left( \frac{16}{75} + \frac{1}{75} + \frac{8}{75} \right) E(\theta^2) + \frac{16}{75} \sigma_1^2 + \frac{1}{75} \sigma_2^2 + \frac{8}{75} \cdot \frac{100}{25} \bar{\theta}^2$$

$$= \underbrace{E(\theta^2) - \bar{\theta}^2}_{\sigma_\theta^2} + \frac{16}{75} \cdot 1 + \frac{1}{75} \cdot 4 + \frac{6}{75}$$

$$\rightarrow \sigma_\theta^2 + \frac{26}{75} //$$

Quindi:

$$\text{var}(\theta - \hat{\theta}) = E[(\theta - \hat{\theta})^2] =$$

$$= E(\theta^2) + E(\hat{\theta}^2) - 2E(\theta \hat{\theta})$$

$$= E[\theta^2] + E[\hat{\theta}^2] - 2E[\theta(\alpha(\theta + e_1) + \beta(\theta + e_2))]$$

$$\text{var}(\theta - \hat{\theta}) =$$

$$E[\theta^2] + E[\hat{\theta}^2] - 2E[\theta(\alpha(\theta + \epsilon_1) + \beta(\theta + \epsilon_2))]$$

$$= E[\theta^2] + E[\hat{\theta}^2] - 2(\alpha + \beta)E[\theta^2] +$$

$$- 2\alpha E(\theta \epsilon_1) - 2\beta E(\theta \epsilon_2)$$

$$= E[\hat{\theta}^2] - E[\theta^2] =$$

$$= \sigma_{\hat{\theta}}^2 + \frac{26}{25} + \bar{\theta}^2 - [\sigma_{\theta}^2 + \bar{\theta}^2] = \frac{26}{25}$$

(c) lo stimatore lineare "ottimo"  
LG p 13-15

da LG-p 14

$$\hat{\theta}_{BL} = d_{od} \cdot d_{od}^{-1} \cdot d$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

matrice di covarianza

$$d_{od} = \begin{bmatrix} \sigma_{d_1}^2 & \sigma_{d_{12}} \\ \sigma_{d_{12}} & \sigma_{d_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{d_1}^2 = ?$$

$$d_1 = \vartheta + e_1$$

$$\vartheta, e_1$$

uncorrelated

$$\text{var } d_1 = \text{var } \vartheta +$$

$$\text{var } e_1$$

$$\text{var } d_1 = 2 + 1 = 3$$

$$\text{var } d_2 = \text{var } \vartheta + \text{var } e_2 = 2 + 4 = 6$$

$$\text{Cov}(d_1, d_2) = E \left[ (d_1 - \underbrace{E(d_1)}_{\bar{\vartheta}}) (d_2 - \underbrace{E(d_2)}_{\bar{\vartheta}}) \right] =$$

$$= E \left[ (d_1 - \bar{\vartheta}) (d_2 - \bar{\vartheta}) \right]$$

$$= E(d_1 d_2) + \bar{\vartheta}^2 - \bar{\vartheta} E d_2 - \bar{\vartheta} E d_1$$

$$= E \left[ (\vartheta + e_1) (\vartheta + e_2) \right] - \bar{\vartheta}^2$$

$$= E(\vartheta^2) + \overbrace{E(e_1 e_2)}^{\sigma_{12}} + \cancel{E(\vartheta e_1)} + \cancel{E(\vartheta e_2)} - \bar{\vartheta}^2$$

$$\text{var } \vartheta = \sigma_{\vartheta}^2$$

$$\Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} 3 & 2,75 \\ 2,75 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{B det } \Lambda_{dd} > 0$$

$$\Lambda_{dd}^{-1} = \frac{1}{10,4375} \begin{bmatrix} 6 & -2,75 \\ -2,75 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{\sigma d} = \begin{bmatrix} \text{cov}(\sigma d_1) & \text{cov}(\sigma d_2) \end{bmatrix}$$

$$\text{cov}(\sigma d_1) = E \left[ (\sigma - \bar{\sigma}) (d_1 - \bar{d}_1) \right]$$

$$= E(\sigma d_1) - \bar{\sigma} E d_1 - \bar{d}_1 E \sigma + \bar{\sigma} \bar{d}_1$$

$$= E \left[ \sigma (\sigma + e_1) \right] - \bar{\sigma}^2$$

$$= E(\sigma^2) + E(e_1) - \bar{\sigma}^2 = \sigma^2$$

$$\text{cov}(\hat{\theta}, d_2) = \dots = \Delta_{\theta}^2$$

$$\hat{\theta}_{3L} = \begin{bmatrix} \Delta_{\theta}^2 & \Delta_{\theta}^2 \\ 10,4375 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & -7,75 \\ -7,75 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 - \bar{\theta} \\ d_2 - \bar{\theta} \end{bmatrix} + \bar{\theta}$$

$$\hat{\theta}_{3L} = \frac{104}{167} d_1 + \frac{8}{167} d_2 + \frac{55}{167} \bar{\theta}$$

$$\text{var} \hat{\theta}_{3L} = \Delta_{\theta}^2 - \Delta_{\theta d_1} \Delta_{d_1}^{-1} \Delta_{d_1 \theta} //$$

L19-P16