Lemma Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e supponiamo che A' sia ottenuta da A mediante operazioni elementari sulle righe (metodo di Gauss). Supponiamo che i pivot di A' si trovino sulle colonne $j_1, \dots, j_k$ di A'. Allora $A_{(j_1)}, \dots, A_{(j_k)}$ sono base per lo spazio delle colonne di A. In particolare $\boxed{\operatorname{rg} A = n - \dim \Sigma_S}$.

Dim $A = (a_{ij})$

$$S : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

cioè $\quad S : A_{(1)} x_1 + \dots + A_{(n)} x_n = 0_{\mathbb{K}^m}$

$x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ incognite con pivot

$h = n - k$ parametri liberi $t_1, \dots, t_h$

$x_{i_1}, \dots, x_{i_h}$ incognite uguali ad un parametro libero $\quad \begin{cases} x_{i_1} = t_1 \\ \dots \\ x_{i_h} = t_h \end{cases}$

$$S : A_{(j_1)} x_{j_1} + \dots + A_{(j_k)} x_{j_k} + A_{(i_1)} x_{i_1} + \dots + A_{(i_h)} x_{i_h} = 0_{\mathbb{K}^m}$$

Per ogni $s = 1, \dots, h$ poniamo successivamente

$$\begin{cases} x_{i_s} = t_s = 1 \\ x_{i_r} = t_r = 0, \quad \forall r \neq s. \end{cases}$$

Le incognite $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ avranno certi valori. Sostituendo si ha:

$$A_{(j_1)} x_{j_1} + \dots + A_{(j_k)} x_{j_k} + A_{(i_s)} = 0_{\mathbb{K}^m}$$

$\Rightarrow \quad A_{(i_s)} = -\left(A_{(j_1)} x_{j_1} + \dots + A_{(j_k)} x_{j_k}\right) \in \operatorname{Span}\left(A_{(j_1)}, \dots, A_{(j_k)}\right).$

$\Rightarrow \quad A_{(j_1)}, \dots, A_{(j_k)}$ <u>generano</u> lo spazio delle colonne.

Mostriamo ora che sono linearmente indipendenti.

$$\lambda_1 A_{(j_1)} + \cdots + \lambda_k A_{(j_k)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{j_1} = \lambda_1 \\ \dots \\ x_{j_k} = \lambda_k \\ x_{i_1} = 0 \\ \dots \\ x_{i_h} = 0 \end{cases}$$ soluzione di S con $\boxed{t_1 = \cdots = t_h = 0}$

$\Rightarrow$ soluzione nulla $\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0 \Rightarrow A_{(j_1)}, \dots, A_{(j_k)}$ lin. indip.

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = k = n - h = n - \dim \Sigma_S$.

Teorema Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice $m \times n$. Allora

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}\right) = \operatorname{rg}_r A$$

Dim $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Consideriamo il sistema omogeneo $S : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$S \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} S' : A'X = 0$ a gradini $\Rightarrow \Sigma_S = \Sigma_{S'}$.

Dato che A' si ottiene da A con operazioni elementari sulle righe, per i Lemmi $\operatorname{rg}_r A = \operatorname{rg}_r A' = \#\text{pivot}(A') = n - \dim \Sigma_S = \operatorname{rg} A$.

OSS $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t A$.

OSS I lemmi forniscono un metodo per il calcolo del rango:

1) $A \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} A'$ a gradini;
2) $\operatorname{rg} A = \#\text{pivot}(A')$.

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rg} A = 3$.

OSS L'ultimo lemma risolve il problema seguente: dati $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}^m$ trovare una base di $U = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_n)$ tra i generatori. Consideriamo $u_1, \dots, u_n$ come <u>vettori colonna</u> $\rightsquigarrow$

$$U = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n) \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} U' \text{ a gradini}$$

pivot in colonne $j_1, \dots, j_k \Rightarrow (u_{j_1}, \dots, u_{j_k})$ base cercata.

Es $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Trovare tra questi generatori una base di $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

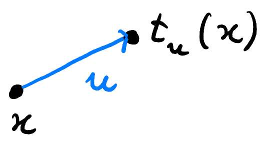
I pivot sono nelle colonne 1 e 2 $\Rightarrow (u_1, u_2)$ base per $\mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $u \in V$. La <u>traslazione</u> di vettore u è l'applicazione

$$t_u : V \longrightarrow V$$

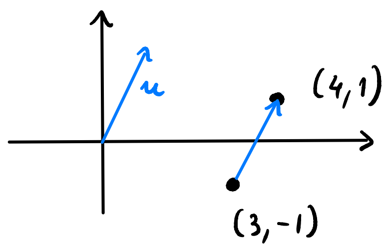
$$t_u(x) = u + x$$

<u>**OSS**</u> Quando operiamo con una traslazione è comodo pensare il vettore di traslazione u come un vettore libero e considerare gli altri vettori di V come <u>punti</u> sui quali si applica u



<u>**Es**</u> $u = (1,2) \in \mathbb{R}^2$

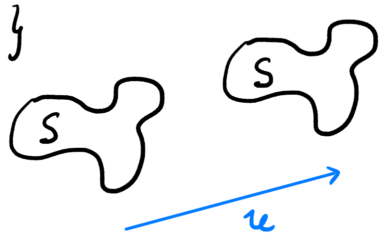
$$t_u(3,-1) = (4,1)$$



Sia ora $S \subset V$ un sottoinsieme e $u \in V$. Poniamo

$$u + S := t_u(S) = \{u + a \mid a \in S\}$$

traslato di S mediante u



<u>**Prop**</u> Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Allora $\forall\, u, v \in V$ si ha:

i) $t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_v \circ t_u$

ii) $t_0 = id_V$

iii) $t_u^{-1} = t_{-u} \implies t_u$ biiettiva

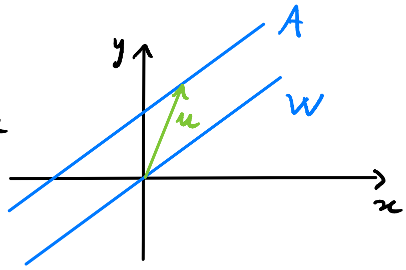
<u>**Dim**</u> i) $(t_u \circ t_v)(x) = t_u(t_v(x)) = t_u(v + x) = u + v + x =$

$= t_{u+v}(x) \quad \forall x \in V \implies t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_{v+u} = t_v \circ t_u$

iii) $t_{-u} \circ t_u = t_u \circ t_{-u} = t_0 = id_V$

Def Un sottoinsieme $A \subset V$ è detto sottospazio affine di V se esistono un sottospazio vettoriale $W \subset V$ ed un vettore $u \in V$ t.c.

$$A = u + W = t_u(W).$$



W è detto *giacitura* di A e poniamo per definizione

$$\dim A := \dim W.$$

OSS 1) I sottospazi affini sono i traslati dei sottospazi vettoriali

2) $A \subset V$ sottospazio affine $\Rightarrow A \neq \emptyset$

3) V è sottospazio affine di sé stesso.

4) $a \in V \Rightarrow a = a + 0_V$ sottospazio affine e $\dim A = 0$

5) $W \subset V$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow W$ sottospazio affine

Teorema Sia $A \subset V$ un sottospazio affine con giacitura $W \subset V$.

Allora:

i) $\forall\, a, b \in A \Rightarrow a - b \in W$.

ii) $\forall\, a \in A, \forall\, w \in W \Rightarrow a + w \in A$.

Dim i) $\exists\, u \in V$ t.c. $A = u + W \Rightarrow \exists\, v, w \in W$ t.c.

$$a = u + v, \quad b = u + w \Rightarrow a - b = v - w \in W$$

ii) $\exists\, v \in W$ t.c. $a = u + v \Rightarrow a + w = u + (v + w) \in A$ perché $v + w \in W$.

Corollario Se $A \subset V$ è un sottospazio affine allora la sua giacitura è $W = \{a - b \mid a, b \in A\}$. In particolare la giacitura di A è univocamente determinata da A.

Dim Poniamo $W' = \{a-b \mid a, b \in A\}$.

Dal teorema: $\forall\, a, b \in A \Rightarrow a-b \in W \Rightarrow W' \subset W$

Scegliamo $a \in A$. $\forall\, w \in W \Rightarrow b = a + w \in A \Rightarrow w = b - a \in W'$
$\Rightarrow W \subset W'$.

Teorema di struttura per sistemi lineari Sia $S : AX = B$ un sistema lineare con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Supponiamo che S sia compatibile. Allora lo spazio delle soluzioni $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine con giacitura lo spazio delle soluzioni Σ_{S_0} del sistema omogeneo associato $S_0 : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$. Inoltre Σ_S è vettoriale $\Leftrightarrow$ S è omogeneo.

Dim Abbiamo già dimostrato che $\Sigma_{S_0} \subset \mathbb{K}^n$ è sottospazio vettoriale.
Sia $u_0 \in \Sigma_S$ una soluzione particolare e sia $u \in \Sigma_S$ una soluzione arbitraria $\Rightarrow$

$$A(u - u_0) = Au - Au_0 = B - B = 0_{\mathbb{K}^m}$$

$\Rightarrow u - u_0 =: v \in \Sigma_{S_0} \Rightarrow u = u_0 + v \in u_0 + \Sigma_{S_0}$

Quindi $\Sigma_S \subset u_0 + \Sigma_{S_0}$

Sia ora $u \in u_0 + \Sigma_{S_0} \Rightarrow \exists\, v \in \Sigma_{S_0}$ t.c. $u = u_0 + v \Rightarrow$

$$Au = A(u_0 + v) = Au_0 + Av = B + 0_{\mathbb{K}^m} = B$$

$\Rightarrow u \in \Sigma_S$. Quindi $u_0 + \Sigma_{S_0} \subset \Sigma_S$. Pertanto

$$\Sigma_S = u_0 + \Sigma_{S_0}$$

è sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ con giacitura Σ_{S_0}.

Σ_S vettoriale $\Rightarrow 0_{\mathbb{K}^n} \in \Sigma_S \Rightarrow A\, 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^m} = B \Rightarrow S$ omogeneo.