



# Costruzioni in Acciaio

Stabilità dell'equilibrio

Aste presso-inflesse

# Instabilità per presso-flessione

Nello studio di un'asta reale, molti sono i parametri che influenzano questo problema:

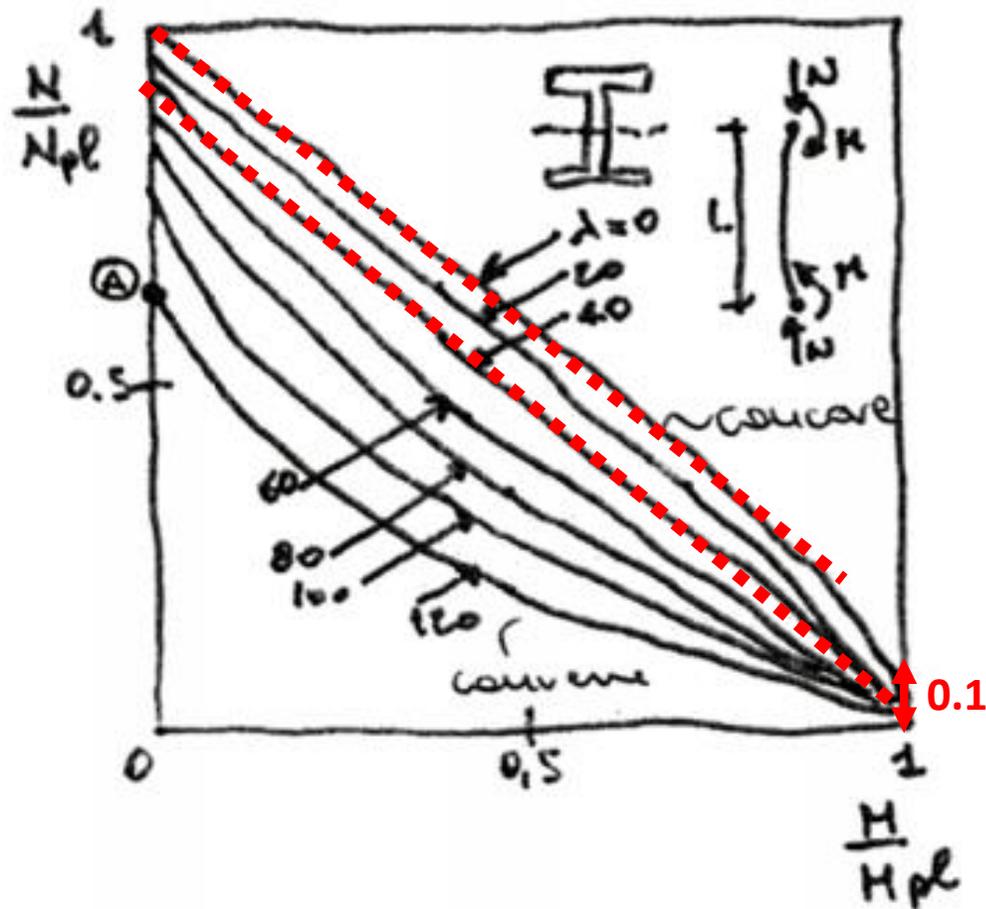
- eccentricità  $e = M/N$ ;
- snellezza  $\lambda$ ;
- la tensione di snervamento del materiale  $f_y$ ;
- la forma della sezione;
- la forma del suo dominio ultimo;
- la presenza di tensioni residue e di imperfezioni geometriche iniziali;
- il processo di carico e la distribuzione del momento flettente lungo l'asta.

Evidentemente per risolvere un problema così complesso non esistono soluzioni in forma chiusa ma solo procedimenti numerici di simulazione e prove sperimentali di confronto dei risultati.

**Per elementi strutturali soggetti a compressione e flessione, si devono studiare i relativi fenomeni di instabilità facendo riferimento a normative di comprovata validità.**

# Approccio semplificato

## Curva di interazione / Dominio resistente



I punti **A** individuano evidentemente il valore del carico critico per  $M = 0$  in funzione della snellezza  $\lambda$ . Per  $\lambda = 0$  il dominio coincide con il dominio plastico della sezione. Si nota inoltre che per piccoli  $\lambda$ , il dominio presenta una concavità verso l'origine, mentre per  $\lambda$  elevati si ha convessità del dominio nei confronti dell'origine.

Molti autori hanno proposto relazioni dirette per esprimere i domini di iterazione  $M - N$  al variare di  $\lambda$ . Il metodo più semplice per costruire il dominio è quello di considerare la retta

$$\frac{N}{N_{cr}} + \frac{M}{M_{pl}} \leq 1$$

**Non sempre a favore di sicurezza!!  
(specie  $\lambda$  elevata)**

# Approccio semplificato (CNR 10011)

La formula semplificata approssima, quindi, il dominio con una retta; questa legge è a favore di sicurezza per  $\lambda$  ridotti, ma non per  $\lambda$  grandi. Le quantità indicate si riferiscono:

$N_{cr}$  massimo carico sopportabile dall'asta semplicemente compressa;

$M_{pl}$  momento ultimo della sezione inflessa.

Per correggere la valutazione nel caso di  $\lambda$  elevati è possibile utilizzare la relazione corretta in modo da presentare la convessità sempre verso l'origine:

$$\frac{N}{N_{cr}} + \frac{M}{M_{pl} \cdot \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)} \leq 1$$

**A favore di sicurezza per qualsiasi  $\lambda$   
Ma priva di supporto teorico**

Considerando i metodi di calcolo riportati nelle CNR 10011, nel caso di aste prismatiche pressoinflesse soggette ad un'azione assiale costante,  $N$ , e a una distribuzione di azione flettente ricondotta al valore  $M_{eq}$  costante lungo tutta l'asta, deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$\frac{\omega \cdot N}{A} + \frac{M_{eq}}{\psi \cdot W \cdot \left(1 - \frac{\nu \cdot N}{N_{cr}}\right)} \leq \begin{cases} f_d \\ \sigma_{adm} \end{cases}$$



# Approccio semplificato (CNR 10011)

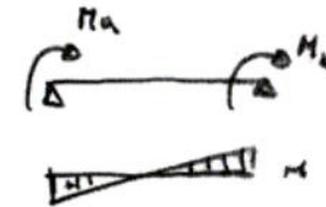
$$\frac{\omega \cdot N}{A} + \frac{M_{eq}}{\psi \cdot W \cdot \left(1 - \frac{\nu \cdot N}{N_{cr}}\right)} \leq \begin{cases} f_d \\ \sigma_{adm} \end{cases}$$

**Tensione dovuta a N** (indicated by an arrow pointing to  $\frac{\omega \cdot N}{A}$ )  
**Coefficiente di adattamento plastico della sezione** (indicated by an arrow pointing to  $\psi$ )  
**Critico Euleriano** (indicated by an arrow pointing to  $N_{cr}$ )  
**Coefficiente di amplificazione = 1.5** (indicated by an arrow pointing to the denominator term  $\left(1 - \frac{\nu \cdot N}{N_{cr}}\right)$ )

**M variabile linearmente e struttura a nodi fissi:**

$$M_{eq} = \beta M = 0.6M_a - 0.4M_b$$

con  $|M_a| \geq |M_b|$  e purché sia  $M_{eq} > 0.4M_a$ .



Se l'asta non è invece a nodi fissi si deve adottare un momento

$$M_{eq} = 1.3 \cdot M_{medio}$$

con la limitazione  $0.75M_{max} \leq M_{eq} \leq M_{max}$ . Questa formulazione è da adottare anche in presenza di carichi lungo l'asta ed è stato verificato che risulta sempre a favore di sicurezza.

Introducendo un momento equivalente generalizzo quindi il problema riconducendolo a quello di un'asta caricata in modo costante.

# Coefficiente di adattamento plastico

Una delle limitazioni nel calcolo delle strutture con il metodo delle tensioni ammissibili è costituito dalla impossibilità di considerare le differenze tra le riserve plastiche possedute da sezioni di forma diversa. La necessità di considerare l'influenza del comportamento post-elastico delle sezioni nella verifica delle strutture, appare evidente se si osserva che due sezioni caratterizzate da diversi coefficienti di forma e sottoposte alla stessa tensione di lavoro (ad es la  $\sigma_{adm}$ ) hanno un diverso coefficiente di sicurezza dei confronti del collasso plastico.

Con:

$$M_{el} = W f_y$$

$$M_{pl} = \varphi M_{el}$$

$$M_{el} \leq M_{lim} \leq M_{pl}$$

La CNR 10011 tiene conto di questo mediante un coefficiente di adattamento plastico che amplifica il modulo di resistenza delle sezioni inflesse definendo dei momenti limite elastici caratterizzati non dalla tensione di snervamento ma da una deformazione irreversibile della sezione, con un procedimento del tutto simile a quello usato nella definizione della tensione convenzionale di snervamento negli acciai con legame  $\sigma - \epsilon$  continuo. Operando con il metodo suddetto si definisce un momento limite elastico per le sezioni inflesse come:

$$M_{lim} = \psi \cdot W \cdot f_y$$

$\psi$  Coefficiente di adattamento plastico della sezione ( $1 \leq \psi \leq \varphi$ )

$\varphi$  Fattore di forma (plastico) della sezione

# Coefficiente di adattamento plastico

$\epsilon_r/\epsilon_e$	$L/h$		
	10	20	30
Fe 360	0,250	0,175	0,117
Fe 430	0,300	0,150	0,100
Fe 510	0,233	0,117	0,078

Figura 13.17: Alcuni coefficienti di adattamento plastico

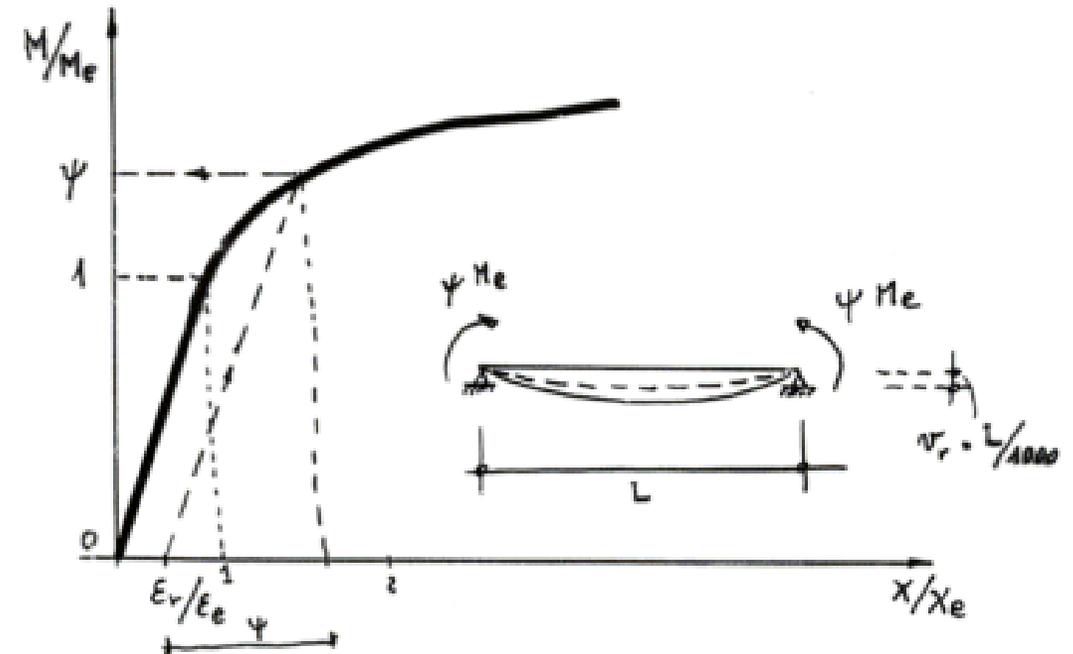


Figura 13.16: Legame adimensionale  $M/M_e$  - curvatura  $x/x_e$

Si considera quindi il  $\psi$  che amplificando  $M_e = W \cdot f_y$  comporta una freccia residua  $v_r \leq L/1000$ .

# Approccio EC3

La verifica all'instabilità delle membrature, con sezioni trasversali in **classe 1 e 2** soggette all'azione combinata di momento flettente e azione assiale è data da:

$$\frac{N}{N_{b,Rd}} + k \frac{M}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

Con:

$$k = 1 - \frac{\mu N}{\gamma_{M1} N_{b,Rd}} \leq 1,5$$

$$\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) + \left(\frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}}\right) \leq 0,9$$

Se, a vantaggio di sicurezza, si lavora in campo elastico ovvero utilizzando il  $W_{el}$  la formula si trasforma in:

$$\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) \leq 0,9$$

$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} \text{ o } M_{c,Rd} = M_{el,Rd}$$

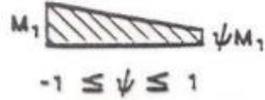
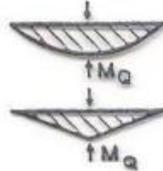
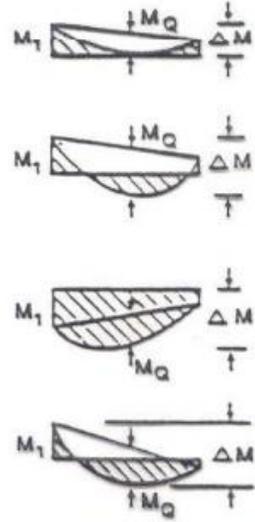
Diagramma del momento	Coefficiente di momento equivalente uniforme $\beta_M$
<p>Momenti all'estremità</p> 	$\beta_{M,\psi} = 1,8 - 0,7 \psi$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano</p> 	$\beta_{M,q} = 1,3$ $\beta_{M,q} = 1,4$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano più momenti d'estremità</p> 	$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,q} - \beta_{M,\psi})$ <p> <math>M_Q =  \max M </math> dovuto al solo carico laterale         </p> <p> <math>\Delta M = \begin{cases}  \max M  &amp; \text{per diagramma del momento senza cambio di segno} \\  \max M  +  \min M  &amp; \text{dove il segno del momento cambia} \end{cases}</math> </p>

Figura 5.5.3 - Coefficienti di momento equivalente uniforme.

# Approccio EC3 – Flessione deviata

## 5.5.4 Flessione e compressione assiale.

- (1) Le membrature aventi sezioni trasversali di Classe 1 e di Classe 2 e soggette all'azione combinata della flessione e della compressione assiale dovranno soddisfare la relazione:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} A f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_y M_{y, sd}}{W_{pl,y} f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_z M_{z, sd}}{W_{pl,z} f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

nella quale: *corico critico asta compressa momento plastico assiale forte*

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y N_{sd}}{\chi_y A f_y} \quad \text{con la limitazione } k_y \leq 1,5$$

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y (2\beta_{My} - 4) + \left[ \frac{W_{pl,y} - W_{el,y}}{W_{el,y}} \right] \quad \text{con la limitaz. } \mu_y \leq 0,90$$

$$k_z = 1 - \frac{\mu_z N_{sd}}{\chi_z A f_y} \quad \text{con la limitazione } k_z \leq 1,5$$

$$\mu_z = \bar{\lambda}_z (2\beta_{Mz} - 4) + \left[ \frac{W_{pl,z} - W_{el,z}}{W_{el,z}} \right] \quad \text{con la limitaz. } \mu_z \leq 0,90$$

$\chi_{min}$  = il valore minore fra  $\chi_y$  e  $\chi_z$

dove  $\chi_y$  e  $\chi_z$  sono i coefficienti di riduzione indicati al punto 5.5.1 rispettivamente per gli assi yy e zz;

e  $\beta_{My}$  e  $\beta_{Mz}$  sono coefficienti di momento equivalente uniforme per l'instabilità flessionale: vedere il punto (7).

- (2) Le membrature aventi sezioni trasversali di Classe 1 e di Classe 2 e per le quali l'instabilità flessio-torsionale è una potenziale modalità di collasso dovranno inoltre soddisfare la condizione:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_z A f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_{LT} M_{y, sd}}{\chi_{LT} W_{pl,y} f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_z M_{z, sd}}{W_{pl,z} f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

nella quale:

$$k_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT} N_{sd}}{\chi_z A f_y} \quad \text{con la limitazione } k_{LT} \leq 1$$

$$\mu_{LT} = 0,15 \bar{\lambda}_z \beta_{M,LT} - 0,15 \quad \text{con la limitazione } \mu_{LT} \leq 0,90$$

dove  $\beta_{M,LT}$  è un coefficiente di momento equivalente uniforme per l'instabilità flessio-torsionale: ved. il punto (7).

Le membrature aventi sezioni trasversali di Classe 3 e soggette all'azione combinata di flessione e sforzo normale dovranno verificare la relazione:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} A f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_y M_{y, sd}}{W_{el,y} f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_z M_{z, sd}}{W_{el,z} f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

dove  $k_y$ ,  $k_z$ , e  $\chi_{min}$  sono definiti come al punto (1);

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y (2\beta_{My} - 4) \quad \text{con la limitazione } \mu_y \leq 0,90$$

$$\text{e } \mu_z = \bar{\lambda}_z (2\beta_{Mz} - 4) \quad \text{con la limitazione } \mu_z \leq 0,90$$

Le membrature aventi sezioni trasversali di Classe 3 e per le quali l'instabilità flessio-torsionale è una potenziale modalità di collasso dovranno inoltre soddisfare la condizione:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_z A f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_{LT} M_{y, sd}}{\chi_{LT} W_{el,y} f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_z M_{z, sd}}{W_{el,z} f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

# Approccio EC3 – Flessione deviata

(5) Le membrature aventi sezioni trasversali di Classe 4 e soggette all'azione combinata di flessione e sforzo normale dovranno verificare la relazione :

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} A_{eff} f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_y M_{y, sd} + N_{sd} e_{N, y}}{W_{oef, y} f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_z M_{z, sd} + N_{sd} e_{N, z}}{W_{oef, z} f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

dove  $k_y$ ,  $k_z$ , e  $\chi_{min}$  sono definiti come al punto (1);

$\mu_y$  e  $\mu_z$  sono definiti come al punto (3);

e  $A_{eff}$ ,  $W_{oef, y}$ ,  $W_{oef, z}$ ,  $e_{N, y}$  ed  $e_{N, z}$  sono definiti come al punto 5.4.8.3.

(6) Le membrature aventi sezioni trasversali di Classe 4 e per le quali l'instabilità flessione-torsionale è una potenziale modalità di collasso dovranno inoltre soddisfare la condizione :

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{LT} A_{eff} f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_{LT} M_{y, sd} + N_{sd} e_{N, y}}{\chi_{LT} W_{oef, y} f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_z M_{z, sd} + N_{sd} e_{N, z}}{W_{oef, z} f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

(7) I coefficienti di momento equivalente uniforme  $\beta_{M, y}$ ,  $\beta_{M, z}$  e  $\beta_{M, LT}$  dovranno essere desunti dalla Figura 5.5.3 in funzione dell'andamento del diagramma del momento flettente fra i punti controventati come segue :

coefficiente momento attorno all'asse controvento all'asse

$\beta_{M, y}$	YY	YY
$\beta_{M, z}$	ZZ	ZZ
$\beta_{M, LT}$	YY	ZZ

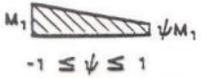
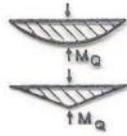
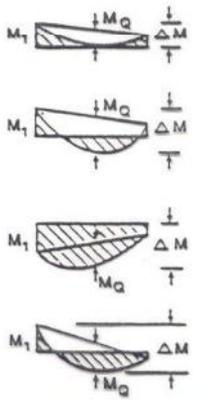
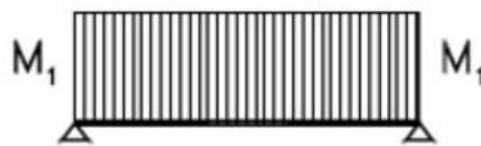
Diagramma del momento	Coefficiente di momento equivalente uniforme $\beta_M$
<p>Momenti all'estremità</p>  <p><math>-1 \leq \psi \leq 1</math></p>	$\beta_{M, \psi} = 1,8 - 0,7 \psi$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano</p> 	$\beta_{M, q} = 1,3$ $\beta_{M, q} = 1,4$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano più momenti d'estremità</p> 	$\beta_M = \beta_{M, \psi} + \frac{M_0}{\Delta M} (\beta_{M, q} - \beta_{M, \psi})$ $M_0 =  \max M $ dovuto al solo carico laterale $\Delta M = \begin{cases}  \max M  & \text{per diagramma del momento senza cambio di segno} \\  \max M  +  \min M  & \text{dove il segno del momento cambia} \end{cases}$

Figura 5.5.3 - Coefficienti di momento equivalente uniforme.

# Approccio EC3 - Esempi

## Caso 1 - Momento Costante



- $\beta_M = 1.8 - 0.7\Psi$
- $\Psi = 1$
- $\beta_M = 1.1$
- $\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) = -1.8\bar{\lambda} \leq 0.9$

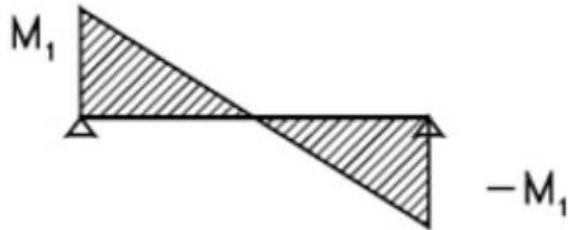
Il valore negativo di  $\mu$  giustifica la formula stessa in quanto per  $\mu$  negativo il parametro  $k$  risulta maggiore dell'unità

Diagramma del momento	Coefficiente di momento equivalente uniforme $\beta_M$
<p>Momenti all'estremità</p> <p><math>M_1</math> <math>\psi M_1</math> <math>-1 \leq \psi \leq 1</math></p>	$\beta_{M,\psi} = 1.8 - 0.7 \psi$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano</p> <p><math>\uparrow M_0</math> <math>\uparrow M_0</math></p>	$\beta_{M,0} = 1.3$  $\beta_{M,0} = 1.4$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano più momenti d'estremità</p> <p><math>M_1</math> <math>\uparrow M_0</math> <math>\frac{\Delta M}{\uparrow}</math> <math>M_1</math> <math>\uparrow M_0</math> <math>\frac{\Delta M}{\uparrow}</math> <math>M_1</math> <math>\uparrow M_0</math> <math>\frac{\Delta M}{\uparrow}</math> <math>M_1</math> <math>\uparrow M_0</math> <math>\frac{\Delta M}{\uparrow}</math></p>	$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_0}{\Delta M} (\beta_{M,0} - \beta_{M,\psi})$ <p><math>M_0 =  \max M </math> dovuto al solo carico laterale</p> <p><math>\Delta M = \begin{cases}  \max M  &amp; \text{per diagramma del momento senza cambio di segno} \\  \max M  +  \min M  &amp; \text{dove il segno del momento cambia} \end{cases}</math></p>

Figura 5.5.3 - Coefficienti di momento equivalente uniforme.

# Approccio EC3 - Esempi

## Caso 2 - Diagramma a Farfalla



- $\beta_M = 1.8 - 0.7\psi$
- $\psi = -1$
- $\beta_M = 2.5$
- $\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) = \bar{\lambda} \leq 0.9$

$k$  diminuisce all'aumentare di  $N$

Tale andamento è funzione della distribuzione del momento all'interno dell'asta (massimo in prossimità dei vincoli, nullo in mezzera) rispetto alla distribuzione del momento del secondo ordine (massimo in mezzera, nullo in prossimità dei vincoli)

Si può affermare che non vi è interazione tra il momento del primo e il momento del secondo ordine

Diagramma del momento	Coefficiente di momento equivalente uniforme $\beta_M$
<p>Momenti all'estremità</p> <p><math>-1 \leq \psi \leq 1</math></p>	$\beta_{M,\psi} = 1.8 - 0.7\psi$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano</p>	$\beta_{M,Q} = 1.3$ $\beta_{M,Q} = 1.4$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano più momenti d'estremità</p>	$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi})$ <p><math>M_Q =  \max M </math> dovuto al solo carico laterale</p> $\Delta M = \begin{cases}  \max M  & \text{per diagramma del momento senza cambio di segno} \\  \max M  +  \min M  & \text{dove il segno del momento cambia} \end{cases}$

Figura 5.5.3 - Coefficienti di momento equivalente uniforme.

# Approccio NTC

Nel caso di aste prismatiche soggette a compressione  $N_{Ed}$  e a momenti flettenti  $M_{y,Ed}$  e  $M_{z,Ed}$  agenti nei due piani principali di inerzia, in presenza di vincoli che impediscono gli spostamenti torsionali, si dovrà controllare che risulti:

$$\frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{min} \cdot f_{yk} \cdot A} + \frac{M_{y,eq,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_y \cdot \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{z,eq,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_z \cdot \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)} \leq 1 \quad (C4.2.32)$$

dove:

$\chi_{min}$  è il minimo fattore  $\chi$  relativo all'inflessione intorno agli assi principali di inerzia;

$W_y$  e  $W_z$  sono i moduli resistenti elastici per le sezioni di classe 3 e i moduli resistenti plastici per le sezioni di classe 1 e 2,

$N_{cr,y}$  e  $N_{cr,z}$  sono i carichi critici euleriani relativi all'inflessione intorno agli assi principali di inerzia;

$M_{y,eq,Ed}$  e  $M_{z,eq,Ed}$  sono i valori equivalenti dei momenti flettenti da considerare nella verifica.

Se il momento flettente varia lungo l'asta si assume, per ogni asse principale di inerzia,

$$M_{eq,Ed} = 1,3 \cdot M_{m,Ed} \quad (C4.2.33)$$

essendo  $M_{m,Ed}$  il valor medio del momento flettente, con la limitazione

$$0,75 \cdot M_{max,Ed} \leq M_{eq,Ed} \leq M_{max,Ed} \quad (C4.2.34)$$

Nel caso di asta vincolata agli estremi, soggetta a momento flettente variabile linearmente tra i valori di estremità  $M_a$  e  $M_b$ ,  $|M_a| \geq |M_b|$ , (Figura C4.2.11), si può assumere per  $M_{eq,Ed}$  il seguente valore

$$M_{eq,Ed} = 0,6 \cdot M_a - 0,4 \cdot M_b \geq 0,4 \cdot M_a \quad (C4.2.35)$$



Figura C4.2.11 Trave soggetta a momenti d'estremità

In presenza di fenomeni di instabilità flessio-torsionali bisogna verificare che sia:

$$\frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{min} \cdot f_{yk} \cdot A} + \frac{M_{y,eq,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{LT} \cdot f_{yk} \cdot W_y \cdot \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{z,eq,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_z \cdot \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)} \leq 1 \quad (C4.2.36)$$

dove  $\chi_{LT}$  è il fattore di riduzione per l'instabilità flessio-torsionale, definito al §4.2.4.1.3.2 delle NTC e  $z$  è l'asse debole.