Lezione 18

Corollario Se $A \subset V$ è un sottospazio affine allora la sua giacitura è $W = \{a - b \mid a, b \in A\}$. In particolare la giacitura di A è univocamente determinata da A.

Dim Poniamo $W' = \{a - b \mid a, b \in A\}$.

Dal teorema: $\forall\, a, b \in A \Rightarrow a - b \in W \Rightarrow W' \subset W$

Scegliamo $a \in A$. $\forall\, w \in W \Rightarrow b = a + w \in A \Rightarrow w = b - a \in W'$
$\Rightarrow W \subset W'$.

Teorema di struttura per sistemi lineari Sia $S : AX = B$ un sistema lineare con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Supponiamo che S sia compatibile. Allora lo spazio delle soluzioni $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ con giacitura lo spazio delle soluzioni $\Sigma_{S_0} \subset \mathbb{K}^n$ del sistema omogeneo associato $S_0 : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$. Inoltre Σ_S è vettoriale $\Leftrightarrow$ S è omogeneo.

Dim Abbiamo già dimostrato che $\Sigma_{S_0} \subset \mathbb{K}^n$ è sottospazio vettoriale.
Sia $u_0 \in \Sigma_S$ una soluzione particolare di S e sia $u \in \Sigma_S$ una soluzione arbitraria $\Rightarrow$

$$A(u - u_0) = Au - Au_0 = B - B = 0_{\mathbb{K}^m}$$

$$\Rightarrow u - u_0 =: v \in \Sigma_{S_0} \Rightarrow u = u_0 + v \in u_0 + \Sigma_{S_0} \Rightarrow \Sigma_S \subset u_0 + \Sigma_{S_0}$$

Sia ora $u \in u_0 + \Sigma_{S_0} \Rightarrow \exists\, v \in \Sigma_{S_0}$ t.c. $u = u_0 + v \Rightarrow$

$$Au = A(u_0 + v) = Au_0 + Av = B + 0_{\mathbb{K}^m} = B$$

$\Rightarrow u \in \Sigma_S \Rightarrow u_0 + \Sigma_{S_0} \subset \Sigma_S$. Pertanto $\Sigma_S = u_0 + \Sigma_{S_0}$.
Σ_S vettoriale $\Leftrightarrow 0_{\mathbb{K}^n} \in \Sigma_S \Leftrightarrow A0 = B = 0$.

Es

1) $$\begin{cases} x + (m+1)\, y = m+2 \\ mx + (m+4)\, y = 3 \end{cases} \qquad m \in \mathbb{R}$$

2) $$\begin{cases} x + (a-1)\, y + (2-a)\, z = a+5 \\ x + a\, y + 2z = 4 \\ x + (a-2)\, y + (2-2a^2)\, z = 6 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

3) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile e risolverlo quando ha più di una soluzione

$$\begin{cases} x + 2y + 2w + z = 1 \\ y + 2w + z = 0 \\ x + y + \lambda w = 0 \\ \lambda y + 2\lambda w + \lambda^2 z = 0 \end{cases}$$

4) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ i vettori seguenti sono lin. dip. e trovare base per lo span:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Equazioni cartesiane e parametriche