1 Fluidi

Sostanza liquida o gassosa priva di forma propria (i.e. assume la forma del recipiente)

- Liquidi : · Volume definito
  · Praticamente Incomprimibile
- Gas : · Non hanno volume proprio
  · Facilmente comprimibile

differenze dovute ai diversi legami tra atomi/molec. nelle 2 fasi

→ Sia nei liquidi che nei gas le distanze medie tra molecole sono molto minori delle dimensioni macroscopiche trattate ⇒ possono essere tratti come corpi continui

→ Nello studio della ~~d~~ meccanica dei fluidi non ha senso considerare il moto e la forza applicata ad una particella, ma si analizza il comportamento di una porzione del mezzo

- Densità: Quantità di massa per unità di volume

$$\rho = \frac{m}{V}$$

m → massa
V → Volume occupato

[Peso Specifico: $P_s = \frac{F_p}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$

F_p → Forza peso

U.d.m N/m^3]

Unità di misura: Kg/m^3

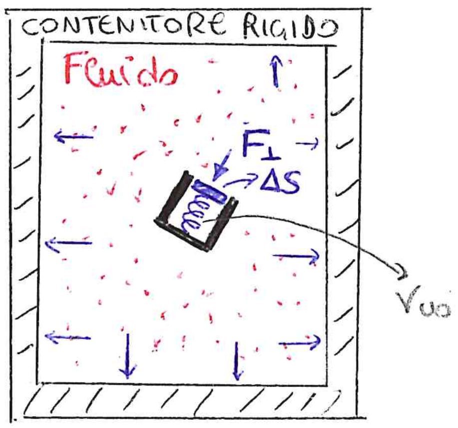
[m] ; $[V] = [l]^3$

Es: acqua → $\rho_{H_2O} = 10^3 Kg/m^3 = 1 Kg/l$

- Pressione: Forza esercitata per unità di superficie

$$P = \frac{F}{S}$$

F → Forza ⊥ alla superficie
S → Superficie su cui e' applicata la forza



La pressione e' una quantità SCALARE:
e.g. in qualsiasi direzione orienti il dispositivo la molla subisce la stessa compressione

Unità di Misura: Pascal

$$Pa = N/m^2 = J/m^3$$

[F] ; [S] ; [E] ; [V]

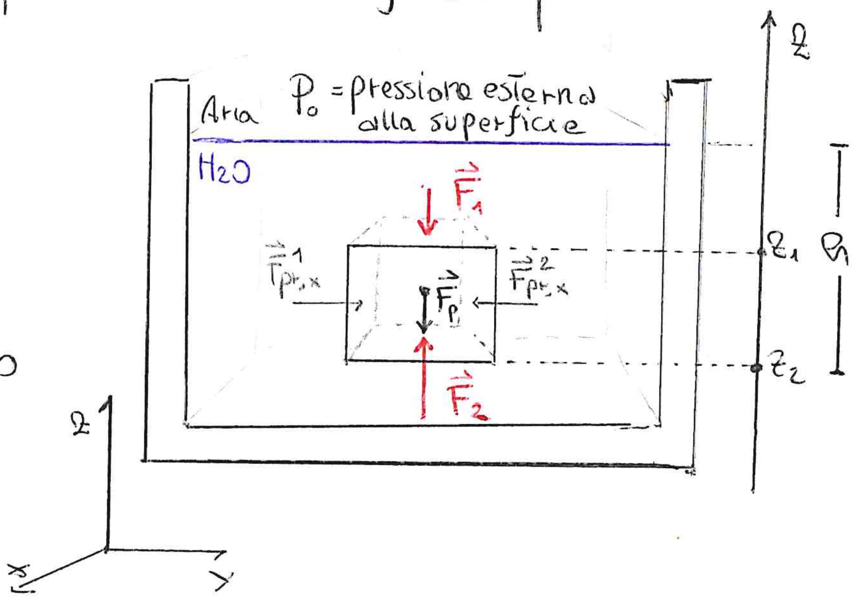
→ La pressione ha le dimensioni di un'energia su volume, ovvero e' una forma di densità di energia

→ Unità di misura alternative

- $1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa}$
- $1\ \text{atm} = 1.01325 \cdot 10^5\ \text{Pa} \simeq 1\ \text{bar}$ (Atmosfera)
- $1\ \text{mmHg} = 1\ \text{Torr} = \frac{1}{760}\ \text{atm} = 133.3\ \text{Pa}$

Equilibrio statico in presenza della forza peso:

- Consideriamo un parallelepipedo all'interno del liquido in quiete.



→ La condizione di equilibrio statico implica che la risultante delle forze in ogni direzione sia nulla:

$$\vec{F}_{Tot} = \vec{F}_p + \vec{F}_{pr} = 0$$

→ Forze di pressione

In particolare, lungo assi x & y, l'unica forza agente è quella di pressione, e dalla condizione $F_{Tot,x} = F_{Tot,y} = 0$, segue che le forze di pressione sulle facce opposte dei piani xz & yz, sono uguali ed opposte (e.g. $\vec{F}^1_{pr,x} = -\vec{F}^2_{pr,x}$)

→ Lungo l'asse z agisce anche la forza peso:

(ometto pr,z per chiarezza)

i) $F_2 = F_1 + F_p = F_1 + mg$

superficie facce

$F_1 = P_1 S$ & $F_2 = P_2 S$

Volume parallelepipedo

$F_p = mg = \rho V g = \rho S (z_1 - z_2) g$

Sostituendo in i) e semplificando S:

$$P_2 - P_1 = \rho g (z_1 - z_2)$$

Ma valido per un volume di qualsiasi forma

• ponendo z_1 a livello della superficie e z_2 ad una profondità h, ricaviamo:

Legge di Stevino

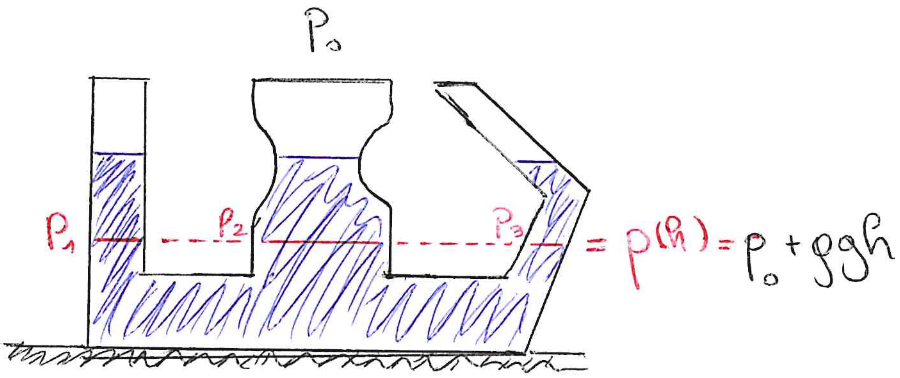
$$p(h) = P_0 + \rho g h$$

P_0: pressione alla superficie (pressione atmosferica)

$\rho g h$: pressione dovuta alla colonna di fluido sovrastante

* esempio sub

Nota: la pressione ad una data profondità NON dipende dalla forma del recipiente



→ In particolare ne consegue che per un sistema di recipienti collegati tra loro e riempiti dello stesso liquido, il liquido si dispone allo stesso livello dal suolo in tutti i recipienti (Principio dei Vasi Comunicanti)

Esempio: Sub inesperto

Un sub, ad 1 m di profondità, inala aria dalle bombole a pieni polmoni prima di lasciarle e risalire a galla trattenendo il fiato.

A quale differenza di pressione sono sottoposti i suoi polmoni una volta raggiunta la superficie?

$$\begin{cases} P_i = P_0 + \rho g h \\ P_f = P_0 \end{cases} \Rightarrow \Delta P = P_f - P_i = -\rho g h \simeq -10^3\, Kg/m^3 \cdot 10\, m/s \cdot 1\, m$$

$$= -10^4\, Pa$$

$\downarrow$

Una volta in superficie l'aria nei polmoni si trova ad una pressione superiore di quella esterna (e di quella sanguinea).

Tale Δp può essere sufficiente a rompere gli alveoli polmonari e spingere aria nel sangue uccidendo il sommozzatore

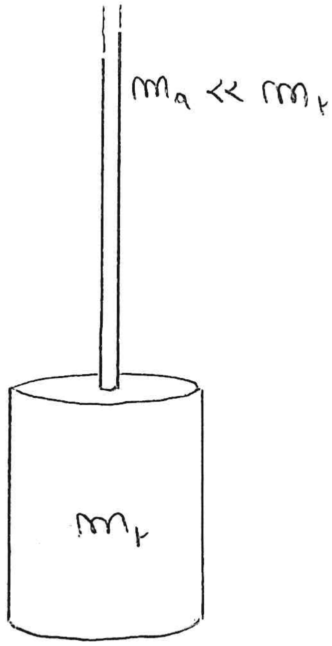
Esempio: Paradosso Idrostatico (Botte di Pascal)

Un recipiente chiuso viene completamente riempito con un liquido.
Immaginiamo di voler rompere il recipiente applicando alle pareti una pressione maggiore di quella massima sopportata da queste ultime, ed avere a disposizione:

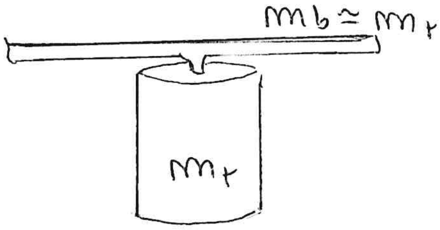
a) un tubo sottile e molto alto contenente una massa di liquido trascurabile rispetto a quella contenuta nel recipiente

b) una vasca con una base molto larga e bordi bassi contenente una massa di liquido comparabile a quella nel recipiente

a)



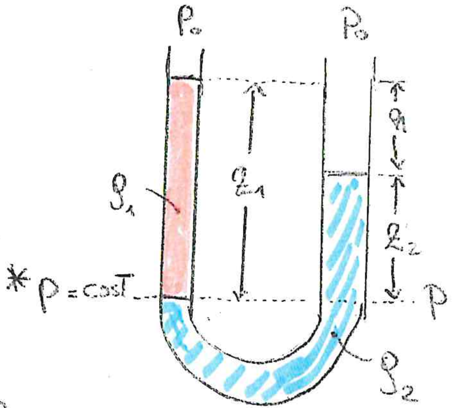
b)



Quale dei 2 dispositivi collegheresti al recipiente per romperlo?

· Equilibrio pressioni Tubo a "U"

Tubo ad U aperto alle estremità riempito con due liquidi non miscibili di densità ρ_1 e ρ_2. Sia p la pressione alla superficie di separazione:



$$p = p_0 + \rho_1 g z_1 = p_0 + \rho_2 g z_2 \Rightarrow \rho_1 g z_1 = \rho_2 g z_2$$

$$\rho_1/\rho_2 = \frac{z_2}{z_1} = 1 - h/z_1 \quad \text{con } h = z_1 - z_2 \Rightarrow$$

dalla misura del dislivello si ricava una misura della densità relativa di un liquido rispetto a quella di un liquido campione.

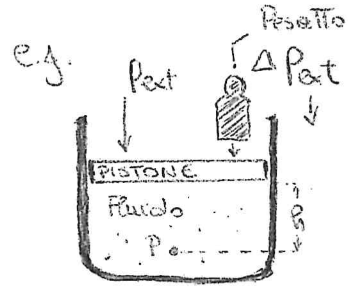
* La pressione alla superficie di separazione dei liquidi è uguale a quella nel braccio destro del tubo allo stesso livello, poiché, per vasi comunicanti con liquido in equilibrio statico sotto la forza peso, la pressione dipende solo dalla profondità.

- Principio di Pascal:
Un cambiamento di pressione applicato ad un fluido (INCOMPRIMIB confinato viene trasmesso inalterato ad ogni porzione del fluido e alle pareti del recipiente che lo contiene:

∴ la pressione in un punto del fluido è data da:

i) $p = P_{ext} + \rho g h$ ⇒ Se aumento la pressione esterna di ΔP_{ext}

pressione esterna

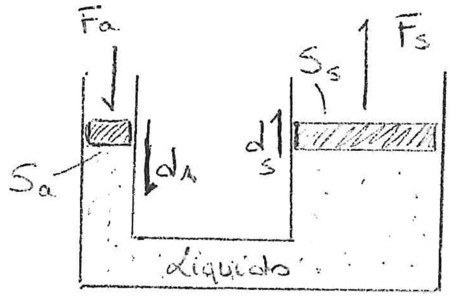


ii) $p' = P'_{ext} + \rho g h$ con $P'_{ext} = P_{ext} + \Delta P_{ext}$

$$\Rightarrow \Delta p = p' - p = P'_{ext} - P_{ext} = \Delta P_{ext}$$ → indipendente da "h"; quindi vale per ogni punto del liqui

- Esempio: Martinetto Idraulico (Torchio Idraulico)

F_a agisce su pistone di sinistra di sezione S_a; il liquido incomprimibile nel dispositivo esercita quindi una forza F_s sul pistone di destra sollevandolo:



→ Per il P. di Pascal: $\Delta p = \frac{F_a}{S_a} = \frac{F_s}{S_s}$

$F_s = F_a \frac{S_s}{S_a} > F_a$ dato che $S_s > S_a$ → Ovvero la forza di sollevamento è maggior di quella che ha azionat il pistone di sinistra

Ovviamente però il lavoro svolto sul pistone di sinistra deve essere uguale a quello svolto dal pistone di destra:

$V = S_a d_a = S_s d_s$ ⇒ I volumi di liquido spostato sono uguali

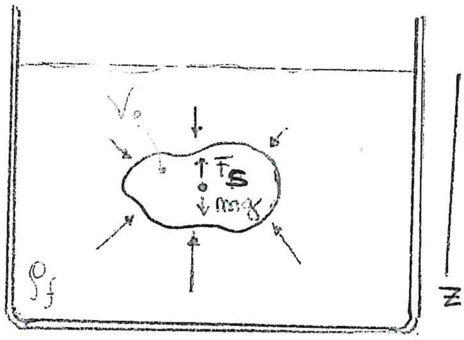
ma: $d_s = d_a \frac{S_a}{S_s} < d_a$ ⇒ Ovvero il pistone di destra si sposta di un tratto più breve.

Lavoro:

$$W_s = F_s d_s = \left(F_a \frac{S_s}{S_a}\right)\left(d_a \frac{S_a}{S_s}\right) = F_a d_a = W_a$$ ⇒ I lavori sui 2 pistoni si eguagliano

Principio di Archimede

Si consideri un volume V_0 di fluido all'interno di un fluido in equilibrio sotto la forza peso.



Dalla condizione di equilibrio:

$$\vec{F}_S + m\vec{g} = 0 \rightarrow F_S - mg = 0 \rightarrow F_S = mg$$

Risultante Forze di pressione

Rivolta verso z negativi

$$F_S = m g = \rho_f V_0 g \rightarrow$$

Forza di "galleggiamento" rivolta verso l'alto

Le forze di pressione esercitate dal fluido sul volume V_0 sono uguali al peso del volume stesso (m

→ La relazione $F_S = \rho_f V_0 g$ rimane ~~rimane~~ valida anche se sostituiamo al volume V_0 di fluido un identico volume di una qualsiasi altra sostanza, mentre varia la forza peso; la condizion di equilibrio non sussiste più e la risultante delle forze è:

Lungo Asse z.

densità corpo immerso

$$F_{Tot} = F_S - m'g = \rho_f V_0 g - \rho V_0 g = (\rho_f - \rho) V_0 g$$

Se $\rho > \rho_f$ $F_{Tot} < 0$ → il corpo affonda

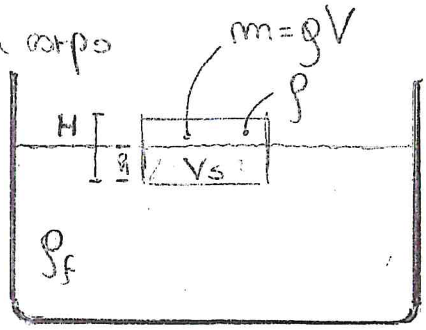
Se $\rho_f > \rho$ $F_{Tot} > 0$ → il corpo galleggia

In entrambi i casi: il corpo riceve una spinta verso l'alto, $F_p = \rho_f V_0 g$, pari al peso del volume di fluido spostato.

- Esempio: Densità di un Corpo che galleggia

Corpo galleggia in quiete → $F_S = \rho_f V_s g = \rho V g$ (massa corpo)

V_s = volume sommerso



$$\rho = \rho_f \frac{V_s}{V} = \rho_f \frac{h}{H}$$ → Nota la densità del liquido posso ricavare quella del corpo sommerso

Nota:

→ La forza (spinta) di galleggiamento NON dipende dalla profondità a cui e' immerso il corpo.
Infatti la differenza di pressione tra le due estremità inferiore e superiore del corpo immerso è: $\Delta p = \rho g h$ (con h altezza del corpo) indipendentemente dalla profondità. Quindi $F_s = \Delta p \, S = \rho g h \cdot S = \rho g V$ c.v.d.

S ↓ Assumo un corpo di forma regolare con superficie di base S

Esempio: Iceberg

Calcolare la percentuale di volume di un iceberg che galleggia fuori dall'acqua:

$$F_s = \rho_{sea} \underbrace{V_s}_{\text{Volume sommerso}} g = \rho_{ice} \underbrace{V}_{\text{Volume totale}} g \Rightarrow V_s/V = \rho_{ice}/\rho_{sea} = \frac{917 \ \text{Kg/m}^3}{1024 \ \text{Kg/m}^3} \simeq 0{,}9$$

Quindi la percentuale di volume al di fuori dell'acqua risulta

$$V_{out} = V - V_s = V\left(1 - \frac{V_s}{V}\right) = V(1 - 0{,}9) = 0{,}1\,V \Rightarrow \frac{V_{out}}{V} = 10\%$$

Fluidi Ideali in Moto

CONSIDERIAMO:

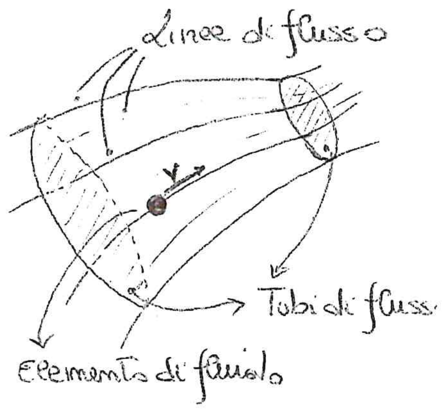
- Fluido Ideale: fluido ~~mom~~ non viscoso ed incomprimibile

  ↓ Ovvero non sono presenti forze di attrito interno che si oppongono allo scorrimento relativo di due elementi di fluido

  ↓ $\rho = cost$

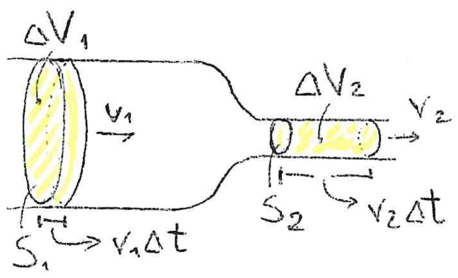
- Regime Stazionario: il campo di velocità del fluido, $v(x,y,z)$ è costante nel tempo. Ovvero la velocità, pur cambiando punto per punto nel fluido, è indipendente dal tempo.

- Linea di flusso (o corrente): corrispondono alla traiettoria seguita da un elemento di fluido; punto per punto hanno verso e direzione della velocità (*)



- Tubo di flusso: tutte le linee di flusso che passano attraverso una generica sezione S individuano un tubo di flusso

- Equazione di Continuità:
  - Si consideri un fluido ideale in moto in regime stazionario. Il volume di fluido che entra nel tubo nel tempo Δt, ΔV_1, attraverso la sezione S_1, è uguale al volume ΔV_2 che attraversa S_2:



$$\Delta V_1 = S_1 v_1 \Delta t = \Delta V_2 = S_2 v_2 \Delta t \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$ ovvero

$R = Sv = costante$ ⇒ La portata di un tubo di flusso è costante; dove la sezione aumenta la velocità diminuisce e viceversa

↓ Portata

→ PORTATA:

$$R = S v$$

Volume di fluido che scorre attraverso una sezione S nell'unità di tempo.

Unità di misura: m^3/s $\quad m^2 \cdot m/s$ $\quad [S]$ $\quad [v]$

Nota:

L'equazione di continuità corrisponde ad una conservazione della massa che attraversa il condotto, ovvero:

$$m_1 = \rho V_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t \equiv m_2 = \rho V_2 = \rho S_2 v_2 \Delta t$$

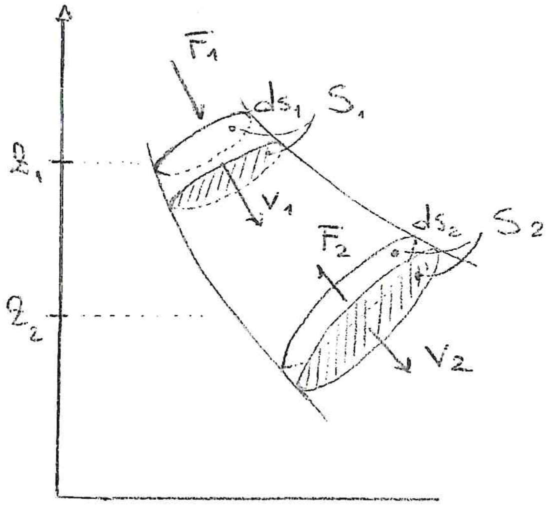
$$\Downarrow$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

m_1 & m_2 masse che fluiscono attraverso S_1 & S_2 in Δt

Equazione di Bernulli

- Fluido Ideale (ρ = cost, No attrito viscoso)
- Regime Stazionario in un condotto a sezione Variabile



Vogliamo ricavare la relazione tra velocità e pressione del fluido nelle varie sezioni.

Fluido Incomprimibile → Volume che passa attraverso S_1 nell'intervallo di tempo dt è uguale al volume di fluido che attraversa S_2

opzionale

$$dV_1 = S_1 ds_1 = dV_2 = S_2 ds_2 \quad (\text{ovvero } dm_1 = \rho dV_1 = dm_2 = \rho dV_2)$$

Applichiamo conservazione dell'energia: ⇒ N.B. Complessivamente in dt, il movimento del fluido corrisponde a spostare la massa di dV_1 in dV_2

i) $$\underbrace{dW}_{\text{lavoro compiuto dalle forze}} = \underbrace{dE_K}_{\text{Variazione Energia Cinetica}}$$

- $dW = \underbrace{dW_{peso}}_{\text{Lavoro forza Peso}} + \underbrace{dW_{press}}_{\text{Lavoro Forza Pressione}}$
- $dW_{peso} = -\underbrace{dE_p}_{\text{Variazione Energia Potenziale}} = -dm\,g(z_2 - z_1) = -\rho dV g(z_2 - z_1)$
- $dW_{press} = \underbrace{\vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1}_{\text{dovuto al liquido a monte}} + \overbrace{\vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2}^{\text{dovuto al liquido a valle}} = p_1 \underbrace{S_1 ds_1}_{dV_1} - p_2 \underbrace{S_2 ds_2}_{dV_2} = (p_1 - p_2)dV$

  $dV_1 \rightarrow \equiv \leftarrow dV_2$
- $dE_K = \frac{1}{2}dm v_2^2 - \frac{1}{2}dm v_1^2 = \frac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2)$

Mettendo i vari termini in i)

$$dW_{peso} + dW_{press} = -\rho dV g(z_2 - z_1) + (p_1 - p_2)dV = dE_K = \frac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

ovvero in generale:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$

pressione in un dato p.to del condotto

densità di energia cinetica

densità di energia potenziale gravitazionale

Equazione di Bernulli

In particolare se il condotto è orizzontale l'altezza è costante (quindi porto $\rho g z$ a destra dell'equazione)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

→ Se in un tratto ~~xxxxxxxx~~ della conduttura (o tubo di flusso) aumenta la velocità (sezione diminuisce) si riduce la pressione, e viceversa

Nota: l'eq.ne di Bernulli può essere interpretata come una sorta di conservazione dell'energia, dove p fa le veci di una densità di energia legata alla pressione

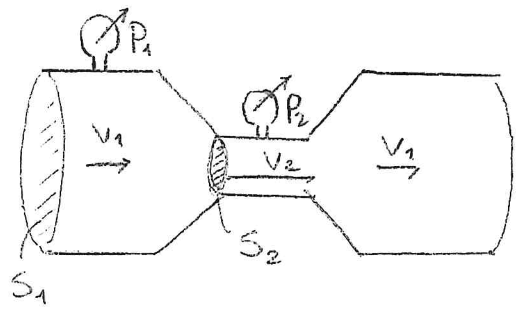
Nota: Ponendo $v = 0$ (fluido statico) si riottiene la legge di Stevino: $p_1 - p_2 = \rho g (z_2 - z_1)$

Si noti che la pressione misurata in un p.to del fluido in quiete è sempre maggiore di quella misurata nel fluido in movimento

- Esempio: Tubo di Venturi

Si considera un condotto orizzontale a sezione variabile

$$\downarrow$$
$$h_1 = h_2$$



i) • $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

ii) • $v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = v_1 S_1 / S_2$

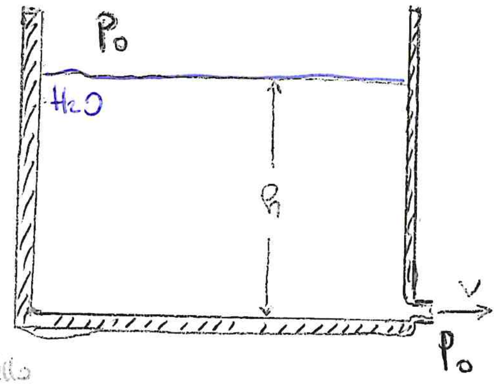
i) + ii)

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}$$

$\Rightarrow$ Dalla misura della differenza di pressione, e note le sezioni del condotto, si possono calcolare velocità del fluido e portata del condotto

Esempio: Teorema di Torricelli

Con che velocità esce il liquido dal foro?



Assumiamo che la sezione del foro (S_f) sia molto minore alla sezione del recipiente (S_r):

$$S_r v_0 = S_f v \quad ; \quad v_0 = \frac{S_f}{S_r} v \Rightarrow v_0 \ll v$$

ovvero cala molto lentamente il livello della vasca

Ovvero la velocità del fluido alla superficie è trascurabile, $v_0 \simeq 0$

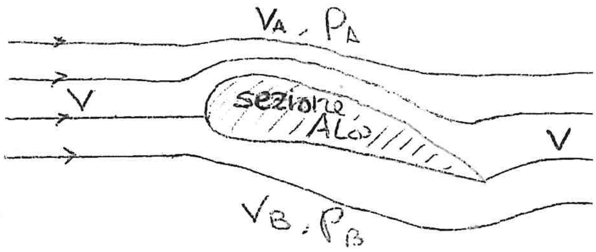
$$P_0 + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v_0^2}_{\simeq 0} + \rho g h = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \longrightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

la velocità di efflusso è pari a quella che avrebbe il liquido in caduta libera da h

la pressione alla superficie è uguale a quella all'uscita del foro

Esempio: Portanza (fluido ideale) (Opzionale)

La forma delle ali di un aereo è scelta in modo da creare una dissimmetria nelle linee di flusso: la velocità relativa dell'aria rispetto all'ala è più alta nella parte superiore rispetto a quella inferiore ⇒ la pressione è minore sopra l'ala rispetto a sotto:



$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \rightarrow \Delta p = 2\rho v \Delta v \rightarrow F = \Delta p A = 2 A \rho v \Delta v$$

$v_A = v + \Delta v \qquad v_B = v - \Delta v$

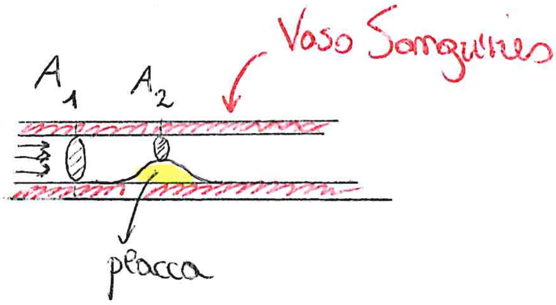
velocità a monte (e valle) del fluido

F: Portanza

A: superficie alare

Nota: Pulsazione Vascolare: (264 Mota)

→ La presenza di placche riduce la sezione trasversale di un vaso sanguineo, con conseguente aumento della velocità del sangue per mantenere la portata costante:



$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

L'aumento della velocità comporta a sua volta una riduzione di pressione nel vaso sanguineo; dall'eq.ne di Bernulli:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

Per una vena ostruita al 75% (da cui $v_2 = 4v_1$) e per valori tipici del flusso sanguineo si ricava:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{-\frac{15}{2}\underbrace{(1{,}05 \cdot 10^3 \, kg/m^3)}_{\nearrow \rho_{sangue}}\underbrace{(0.40 \, m/s)}_{\nearrow v_{sangue}}^2}{15.7 \cdot 10^3 \, Pa} = -8{,}0\%$$

↳ pressione relativa del sangue

Questo calo dell'8% è sufficiente a far collassare il vaso a causa della differenza di pressione, provocando una momentanea interruzione del flusso.

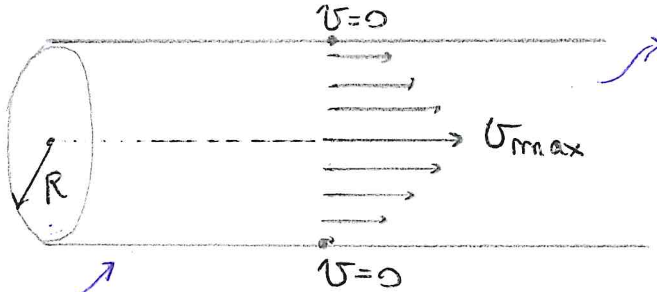
A questo punto la velocità va a zero, la pressione nel vaso riaumenta, e si riapre (Flutter Vascolare)

Moto dei fluidi Reali

→ Nei fluidi reali non possiamo trascurare la forza di attrito interno tra gli elementi di fluido o tra il fluido e le pareti del condotto in cui scorre;

• Moto Laminare: (fluidi reali a bassa velocità)
linee di flusso costanti nel tempo (non si intersecano)

Es:
Fluido che scorre in una conduttura cilindrica

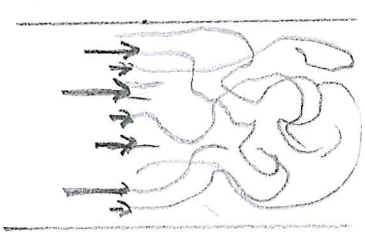


strati cilindrici coassiali di fluido scorrono uno sull'altro a diverse velocità

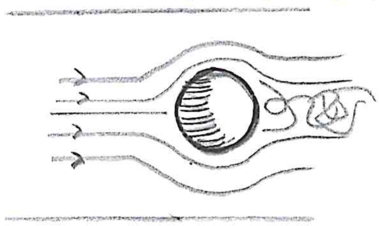
il fluido si muove a "strati" con velocità massima lungo l'asse, e man mano inferiore avvicinandosi alle pareti del condotto

• Moto Turbolento (o Vorticoso)
oltre una certa velocità, detta velocità critica, il flusso diviene turbolento, e le linee di flusso si intersecano e la velocità degli elementi di fluido varia in maniera caotica ed irregolare.

Correnti fluide che scorrono una sull'altra con notevoli differenze di velocità



Presenza di ostacoli nel condotto (o variazioni di forma)



→ Per un condotto cilindrico di raggio R, la Transizione Tra regime laminare a vorticoso può essere valutata usando il numero di Reynolds:

densità fluido → Velocità media

$$\mathcal{R} = \frac{\rho \bar{v} R}{\eta}$$

Numero di Reynolds

η → Viscosità del fluido

↳ Dipende dal Tipo di fluido e dalla Temperatura. Maggiore η, maggiore c'è la forza d'attrito del fluido

Sperimentalmente si Trova che per:

- $\mathcal{R} \lesssim 1000$: Flusso Laminare
- $\mathcal{R} = 1000 \div 1400$ Flusso Instabile
- $\mathcal{R} \gtrsim 1400$ Flusso Turbolento

⇒ Quindi per un dato fluido che scorre in un condotto di raggio R, la velocità critica oltre il quale il moto diviene Turbolento:

$$v_c \simeq 1200 \frac{\eta}{\rho R}$$

Moto dei corpi in un fluido

⇝ Tutti i moti sulla terra avvengono dentro un fluido, l'ari

L'interazione con il fluido si manifesta attraverso una forza che si oppone al moto, il cui effetto dipende dal moto relativo.

I parametri che determinano la resistenza del mezzo sono: forma del corpo, dimensioni del corpo, densità e viscosità del liquido, velocità relativa.

→ In regime laminare, la forza d'attrito viscoso per una sfera è:

$$\vec{F}_\eta = -6\pi\eta \underbrace{R}_{\text{Raggio sfera}} \underbrace{\vec{v}}_{\text{Velocità relativa fluido-corpo}}$$

Legge di Stokes

(Vedi es. 10.10 velocità limite p. 269 Mondadori)

→ In regime turbolento, la resistenza del mezzo è data in modulo da:

$$F_{res} = \frac{1}{2} c S \rho v^2$$

(Vedi forze d'attrito trattate in preceden