Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 7

1) Dimostrare che se X è compatto e connesso e $f : X \to R$ è continua allora f assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.

2) Dimostrare che ogni aperto di R è unione al più numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti. Suggerimento: loc. connesso e II numerabile.

3) Dimostrare che le componenti connesse della retta di Sorgenfrey sono i punti (si dice che è totalmente sconnesso).

4) Fare un esempio di sottospazio compatto di R non localmente connesso.

5) Dimostrare che che se X e Y sono II-numerabili allora $X \times Y$ è II-numerabile.

6) Dimostrare che la retta di Sorgenfrey R_l è I-numerabile e separabile.

7) Sia $R_l^2 = R_l \times R_l$ il *piano di Sorgenfrey*. Dimostrare che $D = \{(x, -x) \mid x \in R\} \subset R_l^2$ è un sottospazio discreto e dedurre che R_l non è II-numerabile.

8) Dimostrare che se una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R_l$ converge a x nella retta di Sorgenfrey R_l allora converge a x in R con la topologia Euclidea. Mostrare con un controesempio che non vale il viceversa. La successione $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 in R_l? In generale, quali successioni convergenti in R convergono anche in R_l?