PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2021/2022

26 settembre 2022

Nome e Cognome:
gruppo: Gruppo A
esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1

Si consideri il seguente sistema dinamico lineare **a tempo continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= +4.8\, x(t) + 15\, u(t) \\ y(t) &= 16\, x(t) - 23\, u(t) \end{aligned}$$

Lo si vuole discretizzare per campionamento (con la *tecnica di campionamento e tenuta*), utilizzando il periodo di campionamento

$$T_s = \frac{1}{24}\ \mathrm{s}$$

Determinare le matrici A_d, B_d, C_d e D_d della descrizione a segnali campionati del sistema.

Sistema a Tempo continuo:

$$A_c = +4.8$$
$$B_c = +15.0$$
$$C_c = +16.0$$
$$D_c = -23.0$$

Conversione c2d "zoh" $\rightarrow$

$$A_d = e^{A_c T_s} \qquad B_d = \int_0^{T_s} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau = A_c^{-1}\left[e^{A_c T_s} - I\right] \cdot B_c$$

Sostituendo:

$$A_d = e^{\overset{0,2}{\cancel{4.8}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{24}}}} = e^{0,2} \simeq 1,2214\ldots$$

$$A_1 = e^{0,2} \simeq 1,2214$$

$$B_1 = \frac{1}{A_c}\left[A_1 - I\right]B_c = \frac{1}{4,8}\left[e^{0,2}-1\right]\cdot 15$$

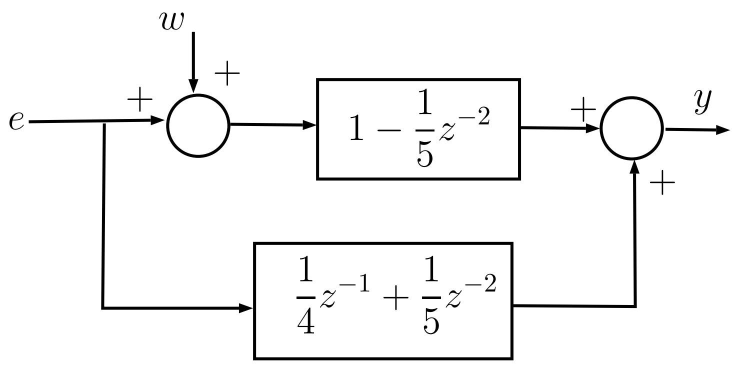
$$= \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{48}_{\cancel{16}\ 8}}\cdot\cancel{15}^{5}\left[e^{0,2}-1\right] = \frac{25}{8}\left[e^{0,2}-1\right]$$

$$\simeq 0,6919$$

$$C_1 = C_c \qquad D_1 = D_c$$

Domanda 2

Si consideri il processo stocastico stazionario descritto nella figura seguente



dove e è un processo stocastico di rumore bianco

$$e(\cdot) \sim \mathrm{WN}(1,\, 1)$$

mentre w è ingresso deterministico

$$w = 1$$

Determinare:

- una rappresentazione in forma canonica per il processo stocastico di y
- valore atteso $\bar{y}$ e varianza σ_y^2 di $y(t)$
- il **predittore ottimo** a k passi dell'uscita $\hat{y}(t+k|t)$ **a partire dal rumore** per $k = 1,\ 2$ e l'errore di predizione, commentando i risultati ottenuti
- per $k = 1$ il **predittore ottimo** $\hat{y}(t+1|t)$ **a partire dai dati**

Equazione alle differenze del processo di y

$$y(t) = \left(1 - \frac{1}{5} z^{2}\right) w(t) +$$
$$+ \left(1 - \cancel{\frac{1}{5} z^{-2}} + \frac{1}{4} z^{-1} + \cancel{\frac{1}{5} z^{-2}}\right) e(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{5} z^{-2}\right) w(t)}_{\text{deterministico}} + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{4} z^{-1}\right) e(t)}_{MA(1)}$$

$C(z)$ ha radici $|\cdot| < 1$

È forma canonica!

$E[y(t)] = \bar{y} = ?$

$WN(1,1)$

$$y(t) = \overbrace{\left(1 - \frac{1}{5} z^{-2}\right)}^{B(z)} \bar{w} + \overbrace{\left(1 + \frac{1}{4} z^{-1}\right)}^{C(z)} e(t)$$

$$\bar{y} = E[y] = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{5} \cdot 1\right)}_{B(1)} \cdot 1 + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{4} \cdot 1\right)}_{C(1)} \cdot 1$$

$$= \frac{4}{5} \cdot 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 = \frac{16 + 25}{20} = \frac{41}{20}$$

$$\text{var}\left[y(t)\right] = \sigma_y^2 = ?$$

$$\sigma_y^2 = 0 + \sigma_{MA}^2 = \left(1 + \frac{1}{16}\right) \cdot 1 = \frac{17}{16}$$

la parte deterministica non contribuisce

---

predittore ad 1 passo alimentato da rumore

$$y(t) = \frac{41}{20} + \underbrace{C(z)\eta(t)}_{\text{costruisco il predittore di questa parte}} \quad \text{con } \eta \sim WN(0,1)$$

$$y_\eta(t) = C(z)\eta(t) \qquad C(z) = \left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)$$

$$A(z) = 1$$

Voglio $\hat{y}_\eta(t+1|t)$ ed anche $\hat{y}_\eta(t+2|t)$

$1+\frac{1}{4}z^{-1}$	1
-1	$1+\frac{1}{4}z^{-1}$
$/\ +\frac{1}{4}z^{-1}$	
$-\frac{1}{4}z^{-1}$	
$\emptyset$	

$$\hat{W}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = E(z) + z^{-r}\underbrace{\hat{W}_r(z)}_{\text{predittore ad r passi!}}$$

$\hat{W}_1(t)$

$k=1$

$$\hat{W}(z) = 1 + z^{-1}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\hat{y}_\eta(t+1|t) = \frac{1}{4}\eta(t)$$

$$\hat{y}(t+1|t) = +\frac{41}{20} + \frac{1}{4}\eta(t)$$

$k=2$

$$\hat{W}(z) = \underbrace{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}_{E(z)} + \emptyset\cdot z^{-2}$$

$\hat{W}_2(z) = \emptyset$

NB il processo è MA(1)

$$\hat{y}(t+2|t) = +\frac{41}{20} + \emptyset \quad //$$

$\bar{y}$

→ Predittore ottimo elimentato dai dati

Serve il filtro sbiancante

predittore + filtro sbiancante $\hat{W}_1(z) \cdot \frac{1}{C(z)} = \frac{1/4}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$

quindi:

$$\hat{y}_q(t+1|t) = \frac{1/4}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\, y_q(t)$$

$$\hat{y}_q(t+1|t) = -\frac{1}{4}\hat{y}_q(t|t-1) + \frac{1}{4} y_q(t)$$

Ma $\quad y(t) = \bar{y} + y_q(t)$

quindi $\quad \hat{y}(t+1|t) = \hat{y}_q(t+1|t) + \bar{y}$

Sostituendo:

$$\hat{y}(t+1|t) = -\frac{1}{4}\left\{\hat{y}(t|t-1) - \bar{y}\right\} + \frac{1}{4}\left[y(t) - \bar{y}\right] + \bar{y}$$

$$\hat{y}(t+1|t) = -\frac{1}{4}\left\{\hat{y}(t|t-1)-\bar{y}\right\} + \frac{1}{4}\left[y(t)-\bar{y}\right]+\bar{y}$$

$$\hat{y}(t+1|t) = -\frac{1}{4}\hat{y}(t|t-1) + \cancel{\frac{1}{4}\bar{y}} + \frac{1}{4}y(t) - \cancel{\frac{1}{4}\bar{y}} + \bar{y}$$

$$\hat{y}(t+1|t) = -\frac{1}{4}\hat{y}(t|t-1) + \frac{1}{4}y(t) + \bar{y}$$

Domanda 3

Di un **processo stocastico stazionario a valore atteso nullo** $y(t)$ sono noti i seguenti campioni di una realizzazione

$$y(1) = 2.0\,,\; y(2) = 0.9\,,\; y(3) = -1.7\,,\; y(4) = 2.9\,,\; y(5) = 6.1$$

Domanda 3.1

A partire da questi dati si identifichi un modello che minimizzi la cifra di merito

$$J = \frac{1}{4}\sum_{t=2}^{5}\left[y(t) - \hat{y}\left(t|t-1\right)\right]^2$$

nella classe di modelli

$$\mathcal{M} : y(t) = ay(t-1) + \epsilon(t) \quad \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0,\, \lambda^2)$$

Domanda 3.2

Sfruttando il risultato ottenuto nella risposta alla domanda precedente, determinare una stima della varianza di rumore del modello λ^2.

Es 3.1 Funzionale di costo

$$J = \frac{1}{4}\left\{ \left[y(2) - a\,y(1)\right]^2 + \left[y(3) - a\,y(2)\right]^2 + \left[y(4) - a\,y(3)\right]^2 + \left[y(5) - a\,y(4)\right]^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \left(\frac{9}{10} - 2a\right)^2 + \left(-\frac{17}{10} - \frac{9}{10}a\right)^2 + \left(\frac{29}{10} + \frac{17}{10}a\right)^2 + \left(\frac{61}{10} - \frac{29}{10}a\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \frac{1}{100}(9 - 20a)^2 + \frac{1}{100}(17 + 9a)^2 + \frac{1}{100}(29 + 17a)^2 + \frac{1}{100}(61 - 29a)^2 \right\}$$

$$\frac{dJ}{da} = 0 \qquad 0 = 2(9 - 20a)(-20) + 2(17 + 9a)\cdot 9 + 2(29 + 17a)(+17) + 2(61 - 29a)(-29)$$

$$0 = \cancel{2}(9-20a)(-20) + \cancel{2}(17+9a)\cdot 9 +$$
$$+ \cancel{2}(29+17a)(+17) + \cancel{2}(61-29a)(-29)$$

$$400a - 180 + 81a + 153 + 493 + 289a$$
$$+ 841a - 1769 = 0$$

$$1611a - 1303 = 0$$

$$\hat{a} = \frac{1303}{1611} \simeq 0{,}81$$

$$A(z) = \left(1 + 0{,}81\, z^{-1}\right)$$

$$W(z) = \frac{1}{1 + 0{,}81\, z^{-1}}$$

Uso $W(t)$ e trovo $\hat{\lambda}^2$!!

$$\hat{\lambda}^2 = J(\hat{a}) = \frac{1}{4} \sum_{t=2}^{5} \left[y(t) - \hat{a}\, y(t-1) \right]^2$$

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{4}\Big[[y(2)-\hat{a}\,y(1)]^2 + [y(3)-\hat{a}\,y(2)]^2 + [y(4)-\hat{a}\,y(3)]^2 + [y(5)-\hat{a}\,y(4)]^2 \Big] =$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{ [0,9-0,81\cdot 2,0]^2 + [-1,7-0,81\cdot 0,9]^2 + [2.9-0,81(-1.7)]^2 + [6.1-0,81\cdot 2.9]^2 \Big\} =$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{ (-0,72)^2 + (-2,43)^2 + (4,28)^2 + (3.75)^2 \Big\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{38,80\} = 9,70$$