PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

11 giugno 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1.1

Si consideri il processo stocastico stazionario

$$y(t+1) = \frac{3}{4}y(t) + \eta(t) - \frac{1}{2}\eta(t-1) \qquad \eta(\cdot) \equiv \mathrm{WN}(4\,,\ 4)$$

- Si trovi il predittore ottimo $\hat{y}\,(t+1\,|t\,)$ e si specifichi la varianza dell'errore di predizione.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

$\eta(\cdot)$ ha valor atteso NON NULLO! Ne devo tener conto nel determinare il predittore!

$\boxed{\text{1° modo}}$ determino il valore atteso del processo stocastico di $y(\cdot)$

Il processo di $y(\cdot)$ è un processo ARMA, descrivibile così

$$\underbrace{\left(z - \frac{3}{4}\right)}_{A(z)} y(t) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}_{C(z)} \eta(t)$$

NON è in forma canonica!

$$W(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\cdot z^{-1}}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

$$\bar{W}(z) = \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cdot z^{-1}}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)} \cdot \left(z^{+1}\right)$$ ← cfr. Lecture 7 - p 30

In forma canonica quindi

$$\bar{W}(z) = \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

È un processo ARMA(1,1)

cioè

$$y(t) = \frac{3}{4}y(t-1) + \varepsilon(t) - \frac{1}{2}\varepsilon(t-1)$$

$$\text{con } \varepsilon(t) = \eta(t-1) \longrightarrow \varepsilon(\cdot) \sim WN(4,4)$$

[traslare nel tempo la v.a. di un processo stocastico stazionario NON modifica né valore atteso né varianza]

A questo punto, indicando con $\bar{y} = E[y(t)]$ si ha

$$E[y(t)] = \frac{3}{4}E[y(t-1)] + E[\varepsilon(t)] + -\frac{1}{2}E[\varepsilon(t-1)]$$

$E[\varepsilon(\cdot)] = 4$

$$\bar{y}\left(1-\frac{3}{4}\right) = 4\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{y} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1} = 8$$

A questo punto creo le v.a.

$$\xi(t) \triangleq \varepsilon(t) - \bar{\varepsilon} \qquad \bar{\varepsilon} = E[\varepsilon(t)] = 4$$

$$v(t) \triangleq y(t) - \bar{y} \qquad \bar{y} = E[y(t)] = 8$$

è $WN(0,4)$ per costruzione

è v.a. con valore atteso 0

Inoltre $\sigma_v^2 = \sigma_y^2$

per costruzione

A questo punto valgono le relazioni

$$\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} + \xi(t)$$

$$y(t) = \bar{y} + v(t)$$

Le sostituisco nella equazione alle differenze del processo ARMA (1,1) in forma canonica

$$v(t) + \bar{y} = \frac{3}{4}\left[\bar{y} + v(t-1)\right] + \bar{\varepsilon} + \xi(t) + -\frac{1}{2}\left[\bar{\varepsilon} + \xi(t-1)\right]$$

Rielaboro:

$$v(t) = \frac{3}{4}v(t-1) - \bar{y}\left(1 - \frac{3}{4}\right) + \bar{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + + \xi(t) - \frac{1}{2}\xi(t-1)$$

$$v(t) = \frac{3}{4} v(t-1) \cancel{- \frac{1}{4}\bar{y}} \cancel{+ \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}} + \xi(t) - \frac{1}{2}\xi(t-1)$$

$\bar{y} = 8$ $\quad$ $\bar{\varepsilon} = 4$

In definitiva

$$v(t) = \frac{3}{4} v(t-1) + \xi(t) - \frac{1}{2}\xi(t-1)$$

con $\xi(\cdot) = WN(0, 4)$

e con $E[v(t)] = 0$

Ora determino il predittore ottimo ad 1 passo per il processo di $v(\cdot)$ alimentato dai dati

$$\hat{v}(t|t-1) = \frac{C(z) - A(z)}{C(z)} v(t)$$

$\boxed{\text{cfr L10-p27}}$

con $C(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-1}$

$A(z) = 1 - \frac{3}{4} z^{-1}$

$$\hat{v}(t|t-1) = \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) z^{-1}}{\left[1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right]} v(t)$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{4} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}\right] v(t)$$

Nel dominio del tempo

$$\hat{v}(t|t-1) = \frac{1}{2}\hat{v}(t-1|t-2) + \frac{1}{4}v(t-1)$$

Ora dato che $\quad y(t) = \bar{y} + v(t)$

posso scrivere:

$$\hat{y}(t|t-1) = \bar{y} + \hat{v}(t|t-1)$$

e sostituendo nel predittore ad un passo per $v(\cdot)$ ottengo

$$\hat{y}(t|t-1) = \bar{y} + \hat{v}(t|t-1) =$$

$$= \bar{y} + \frac{1}{2}\hat{v}(t-1|t-2) + \frac{1}{4}v(t-1) =$$

$$[\hat{y}(t-1|t-2) - \bar{y}] \qquad\qquad [y(t-1) - \bar{y}]$$

$$\hat{y}(t|t-1) = \bar{y} + \frac{1}{2}[\hat{y}(t-1|t-2) - \bar{y}] + \frac{1}{4}[y(t-1) - \bar{y}]$$

$$= \frac{1}{2}\hat{y}(t-1|t-2) + \frac{1}{4}y(t-1) +$$

$$+ \bar{y}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

In definitiva

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{1}{2}\hat{y}(t-1|t-2) + \frac{1}{4}y(t-1) + \frac{1}{4}\bar{y}$$

$\bar{y} = 8$ $\quad \frac{1}{4}\bar{y} = +2$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

Nell'equazione alle differenze che descrive il processo modifico la descrizione del WN in ingresso

$$y(t+1) = \frac{3}{4}y(t) + \eta(t) - \frac{1}{2}\eta(t-1)$$

$$\eta(\cdot) \sim WN(4,4)$$

$$\varepsilon(t) \triangleq \eta(t) - 4 \longrightarrow \eta(t) = 4 + \varepsilon(t)$$

con $\varepsilon(t) \sim WN(0,4)$

$\bar{\eta}$: segnale deterministico costante

Sostituendo ottengo

$$y(t+1) = \frac{3}{4}y(t) + \bar{\eta} + \varepsilon(t) - \frac{1}{2}\bar{\eta} - \frac{1}{2}\varepsilon(t-1)$$

$$y(t+1) = \frac{3}{4} y(t) + \frac{1}{2}\bar{\eta} + \varepsilon(t) - \frac{1}{2}\varepsilon(t-1)$$

è deterministico e costante

Lo tratto come ingresso esogeno costante $\bar{u} = \frac{1}{2} 4 = +2$

Ora considero il processo SENZA ingresso esogeno

$$\tilde{y}(t+1) = \frac{3}{4}\tilde{y}(t) + \varepsilon(t) - \frac{1}{2}\varepsilon(t-1)$$

AB posso fare a meno di determinarlo

Per costruzione $E[\varepsilon(t)] = 0$, quindi anche $E[\tilde{y}(t)] = 0$

Vale che: $\tilde{y}(t) = y(t) - E[y(t)] = y(t) - \bar{y}$

Il processo di $\tilde{y}$ è ARMA non in forma canonica.

Infatti $$\tilde{W}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{z - \frac{3}{4}} = \frac{z^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}$$

Per ottenere la forma canonica moltiplico per z^{+1}

$$W(z) = z^{+1}\cdot\tilde{W}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}$$

Il predittore vale

$$\hat{\tilde{y}}(t|t-1) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\,\tilde{y}(t)$$

Quindi
$$\hat{\tilde{y}}(t|t-1) = \frac{1}{2}\hat{\tilde{y}}(t-1|t-2) + \frac{1}{4}\tilde{y}(t-1)$$

Ora ripristino l'ingresso esogeno $\bar{u}$ [cfr. L10-p.29] per ottenere il predittore richiesto

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{1}{2}\hat{y}(t-1|t-2) + \frac{1}{4}y(t-1) + \overset{\bar{u}}{\overset{\downarrow}{2}}$$