

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2021/2022

21 gennaio 2022

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo A

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1

Si consideri il sistema descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.5x_1(k) + e(k) \\ x_2(k+1) = 0.8x_2(k) + u(k) + 2.5e(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

dove $e(k)$ è un disturbo descritto da rumore bianco con valore atteso nullo e varianza pari a 2, mentre $u(k)$ è una variabile manipolabile e deterministica

$$e(\cdot) \sim \text{WN}(0, 2)$$

Si chiede di

- determinare l'equazione alle differenze (il modello I/O) con $y(k)$, $u(k)$ ed $e(k)$. A quale famiglia di modelli appartiene il modello appena trovato?
- se la parte stocastica del modello appena trovato non è un fattore spettrale canonico, sostituirla con il corrispondente fattore spettrale canonico. Motivare e spiegare il ricavo del fattore spettrale canonico.
- determinare il predittore ottimo ad un passo, alimentato dai dati $\hat{y}(k|k-1)$.
- calcolare la varianza dell'errore di predizione del predittore appena trovato.

Matrici del modello in cp di stato

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in FOT

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} B [u(z) \quad e(z)]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z - 0.5) & 0 \\ 0 & (z - 0.8) \end{bmatrix}^{-1} B [u \quad e]$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{(z-0,5)(z-0,8)} \begin{bmatrix} z-0,8 & 0 \\ 0 & z-0,5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{z-0,5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-0,8} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{z-0,5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-0,8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \frac{1}{z-0,8} u(t) + \frac{2,5}{z-0,8} e(t)$$

$$y(t+1) = 0,8 y(t) + u(t) + 2,5 e(t)$$

$$y(t) = 0,8 y(t-1) + u(t-1) + 2,5 e(t-1)$$

modello ARX $WN(0, 2,5) \leftarrow 2,5 e(t-1) \triangleq q(t)$

$$y(t) = 0,8 y(t-1) + u(t-1) + q(t) \quad \text{forma canonica}$$

$$A(z) = 1 - 0,8z^{-1} \quad B(z) = z^{-1} \quad (C) = 1$$

$$y(t) = 0,8 y(t-1) + u(t-1) + \eta(t)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = 0,8 y(t-1) + u(t-1) //$$

$$\varepsilon(t) \triangleq y(t) - \hat{y}(t|t-1)$$

$$\text{var}[\varepsilon] = \text{var} \eta = 12,5 //$$