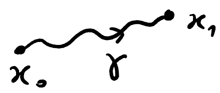
Lezione 15

Def Uno spazio X è <u>connesso per archi (cpa)</u> se $\forall x_0, x_1 \in X$ $\exists$ cammino $\gamma : I \to X$ t.c. $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$



Es 1) X_{ban} connesso per archi

2) $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ X cpa

<u>Convesso</u>: $\forall x_0, x_1 \in X$ il segmento $\overline{x_0 x_1} \subset X$

$\gamma : I \longrightarrow X$, $\underbrace{\gamma(t) = (1-t)\,x_0 + t\,x_1}_{\text{combinazione convesse di } x_0 \text{ e } x_1}$ $\Rightarrow \gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$

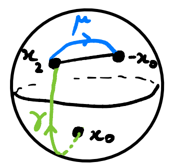
3) S^n cpa $\forall n \geq 1$: $\forall x_0, x_1 \in S^n$

i) $x_1 \neq -x_0 \rightsquigarrow \gamma : I \to S^n$, $\gamma(t) = \dfrac{(1-t)\,x_0 + t\,x_1}{\|(1-t)x_0 + t\,x_1\|}$

ii) $x_1 = -x_0 \rightsquigarrow \exists\, x_2 \in S^n - \{\pm x_0\}$

$\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_2$, $\mu : x_2 \rightsquigarrow -x_0$

$\Rightarrow \gamma \cdot \mu : x_0 \rightsquigarrow x_2$.



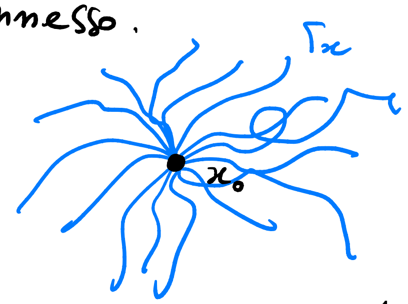
OSS $S^0 = \{-1, 1\}$ non cpa.

OSS La connessione per archi è una <u>proprietà topologica</u> non ereditaria.

Teorema Se X è connesso per archi allora X è connesso.

Dim Scegliamo $x_0 \in X$. $\forall x \in X$ $\exists\, \gamma_x : I \longrightarrow X$ cammino tra x_0 e x $\Rightarrow \Gamma_x := \gamma_x(I)$ connesso

$x_0 \in \bigcap_{x \in X} \Gamma_x \neq \emptyset \Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} \Gamma_x$ connesso.



Proposizione X cpa $\iff \exists\, x_0 \in X$ t.c. $\forall\, x \in X\ \exists\, \gamma : I \to X$ cammino tra x_0 e x.

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x, y \in X\ \exists\, \gamma : x_0 \rightsquigarrow x$ e $\mu : x_0 \rightsquigarrow y \Rightarrow$ $\bar{\gamma} \cdot \mu : x \rightsquigarrow y \Rightarrow X$ cpa. $\boxed{\Rightarrow}$ banale.

Teorema Sia $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ con $X_j \subset X$ sottospazio cpa $\forall j \in J$.

(i) $\bigcap_{j \in J} X_j \neq \emptyset \Rightarrow X$ cpa.

(ii) $\exists\, j_0 \in J$ t.c. $X_j \cap X_{j_0} \neq \emptyset\ \forall j \in J \Rightarrow X$ cpa.

Dim (i) $x_0 \in \bigcap_{j \in J} X_j$, $\forall\, x \in X\ \exists\, j_0 \in J$ t.c. $x \in X_{j_0} \Rightarrow \exists\, \gamma : I \to X_{j_0} \subset X$ cammino $x_0 \rightsquigarrow x$. (ii) $X_j' = X_j \cup X_{j_0}$ $\forall\, j \in J$ e si usa (i).

OSS Cf. analogo teorema nel caso connesso.

Teorema Supponiamo che $f : X \to Y$ sia continua e suriettiva. Se X è cpa allora Y è cpa.

Dim $\forall\, y_0, y_1 \in Y\ \exists\, x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $x_1 \in f^{-1}(y_1) \Rightarrow \exists\, \gamma : I \to X$ cammino $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1 \Rightarrow \mu = f \circ \gamma : I \to Y$ cammino, $\mu(0) = y_0$, $\mu(1) = y_1$.

Corollario Se X è cpa e $f : X \to Y$ è continua allora $f(X)$ cpa.

Teorema Se $X_1, \dots, X_n$ sono connessi per archi allora $X = X_1 \times \dots \times X_n$ è connesso per archi.

Dim $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$

$\gamma_k : I \to X_k$ cammino tra x_k e $y_k \in X_k$, $k = 1, \dots, n \rightsquigarrow$

$\gamma : I \to X$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ cammino tra x e y.

OSS Vale anche per prodotti infiniti.

OSS T^n connesso per archi.

Def Sia X uno spazio e $x \in X$. La componente connessa per archi di x è

$$\mathcal{P}_x(X) := \bigcup_{\substack{x \in A \subset X \\ A \text{ cpa}}} A .$$

Definiamo l'insieme delle componenti connesse per archi di X

$$\mathcal{P}(X) := \{ \mathcal{P}_x(X) \mid x \in X \}$$

Teorema $\forall$ spazio X e $\forall x, y \in X$ valgono le proprietà seguenti:

i) $x \in \mathcal{P}_x(X) \neq \phi$

ii) $\mathcal{P}_x(X)$ è connesso per archi

iii) $\mathcal{P}_x(X) \cap \mathcal{P}_y(X) \neq \phi \Rightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{P}_y(X)$

iv) $\mathcal{P}(X)$ è una partizione di X

v) $\mathcal{P}_x(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$.

Dim (i) - (iv) sono simili al caso di $\mathcal{C}_x(X)$.

(v) $x \in \mathcal{P}_x(X)$ cpa $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X)$ connesso $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$.

NB 1) $\mathcal{P}_x(X)$ non è detto che sia chiuso né aperto, $\mathcal{C}_x(X)$ chiuso

2) $\mathcal{P}_x(X)$ è il più grande sottospazio cpa che contiene x.

3) L'inclusione $\mathcal{P}_x(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$ può essere stretta.

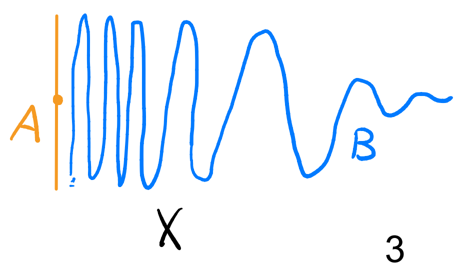
4) X cpa $\Leftrightarrow X = \mathcal{P}_x(X)$, $x \in X$.

Es $A = \{0\} \times [-1, 1]$, $B = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$, $X = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$

connesso ma non cpa: $\mathcal{P}(X) = \{A, B\}$

$\nexists$ cammino in X tra $(0,0)$ e $(1, \sin 1)$.

A chiuso in X, B aperto in X



Def X è <u>localmente connesso per archi</u> se $\forall x \in X\ \exists\ \mathcal{J}_x$ base di intorni connessi per archi di x in X.

Es 1) $U \subset \mathbb{R}^n$ <u>aperto</u> $\Rightarrow$ U loc. cpa : $B(x;\varepsilon)$ cpa.

2) X loc. cpa e $U \subset X$ <u>aperto</u> $\Rightarrow$ U loc. cpa.

OSS Loc. cpa $\Rightarrow$ loc. connesso.

Teorema Sia X loc. connesso per archi e $x \in X$. Allora:

i) $\mathcal{P}_x(X)$ aperto e chiuso in X.

ii) $X = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}(X)} P$ unione topologica delle sue componenti cpa.

iii) $\mathcal{P}_x(X) = \mathcal{C}_x(X)$.

Dim (i) $\forall y \in \mathcal{P}_x(X)$ $\exists$ $U \subset X$ intorno cpa di y in X $\Rightarrow$ $y \in U \subset \mathcal{P}_y(X) = \mathcal{P}_x(X)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_x(X)$ aperto $\forall x \in X$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_x(X)$ chiuso.

ii) $\mathcal{P}(X)$ partizione di X in aperti non vuoti.

iii) $\exists\, y \in X$ t.c. $\mathcal{C}_x(X) \subset \mathcal{P}_y(X)$ per la (ii). D'altra parte $\mathcal{P}_x(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$ $\Rightarrow$ $x \in \mathcal{P}_y(X)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_x(X) = \mathcal{P}_y(X) = \mathcal{C}_x(X)$.

Corollario Sia X connesso e loc. connesso per archi. Allora X è connesso per archi.

Dim $x \in X \Rightarrow X = \mathcal{C}_x(X) = \mathcal{P}_x(X)$.