Corso di ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

Foglio di esercizi n. 4

1. Si determinino i punti di intersezione e le relative molteplicità tra le seguenti curve
$$\mathcal{C}_1 = V(x_0x_2^2 - x_1^3)\,,\, \mathcal{C}_2 = V(x_0x_2^2 - x_1^2(x_1 + x_0)) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,.$$

2. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica. Si dimostri che l'insieme delle singolarità $\mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ è finito.

3. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica proiettiva e sia $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Supponiamo che esistano $i, j \in \{0, 1, 2\}$ tali che $i \neq j$, $p \in U_i \cap U_j$, $\mathcal{C} \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset$; dove $U_k = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \,|\, x_k \neq 0\}$, per $k = 0, 1, 2$. Si provi che
$$\mathrm{ord}_{\phi_i(p)}\left(\phi_i(\mathcal{C} \cap U_i)\right) = \mathrm{ord}_{\phi_j(p)}\left(\phi_j(\mathcal{C} \cap U_j)\right)\,,$$
dove $\phi_k\colon U_k \to \mathbb{C}^2$ denota l'isomorfismo definito a lezione, per ogni $k = 0, 1, 2$.

4. Una curva algebrica $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ si dice *razionale* se esiste una parametrizzazione razionale $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathcal{C}$ (cioè $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathcal{C}$ è una applicazione suriettiva, $\varphi([t_0 : t_1]) = [\varphi_0(t_0, t_1) : \varphi_1(t_0, t_1) : \varphi_2(t_0, t_1)]$ dove φ_i sono polinomi omogenei di grado $\deg(\mathcal{C})$, per $i = 0, 1, 2$).
Si dimostri che una curva algebrica razionale è irriducibile.