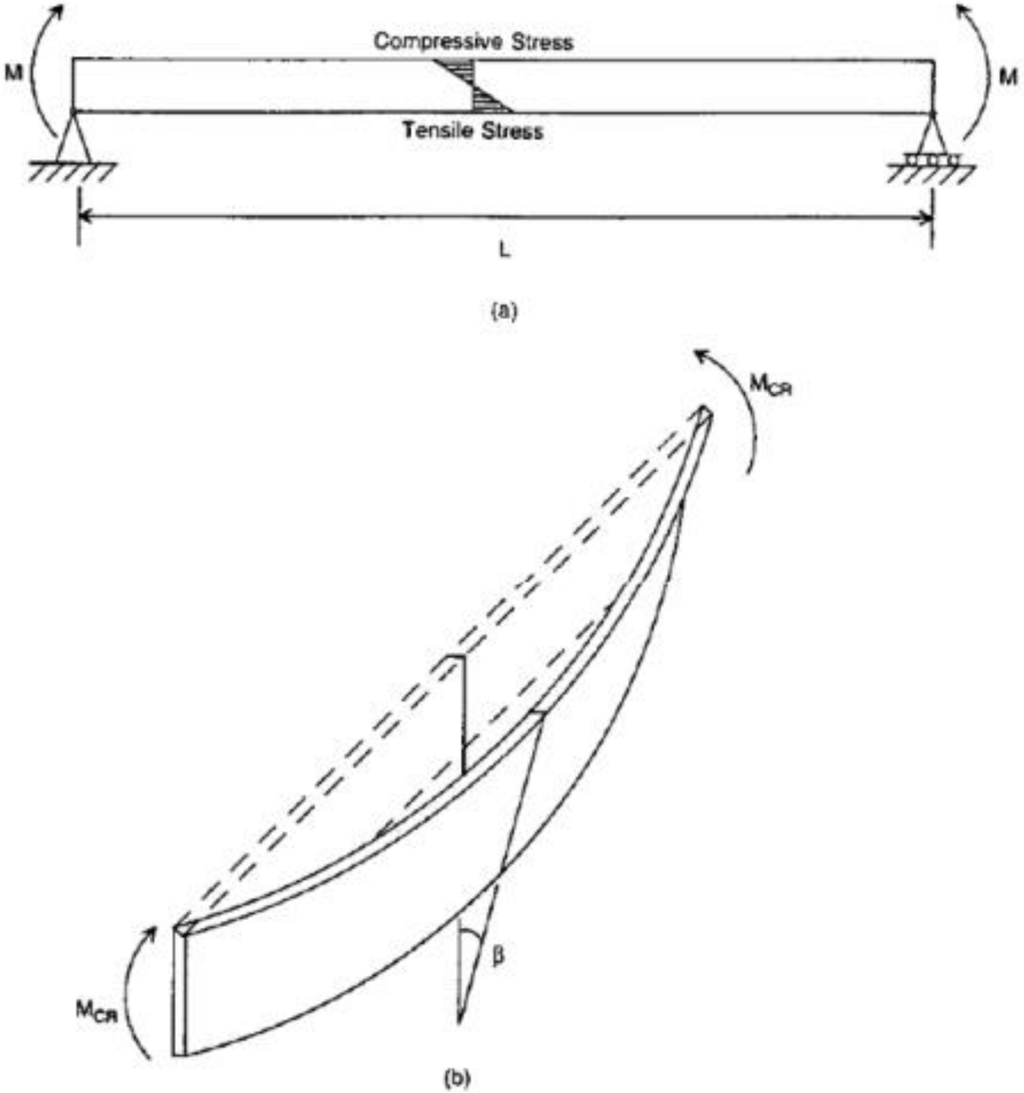
Costruzioni in Acciaio

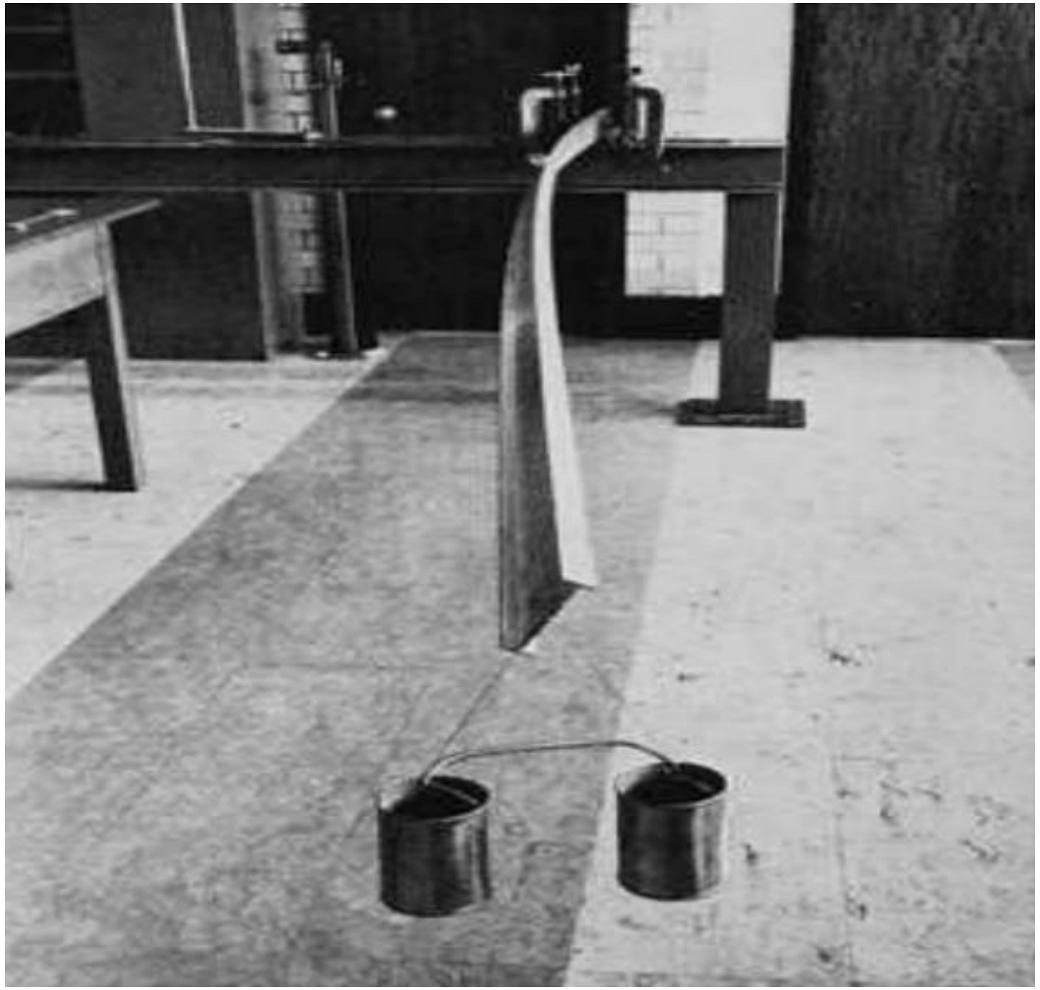
Torsione non uniforme (teoria di Vlasov)

Introduzione



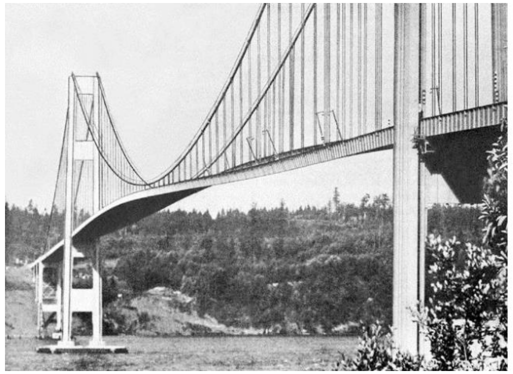
Introduzione

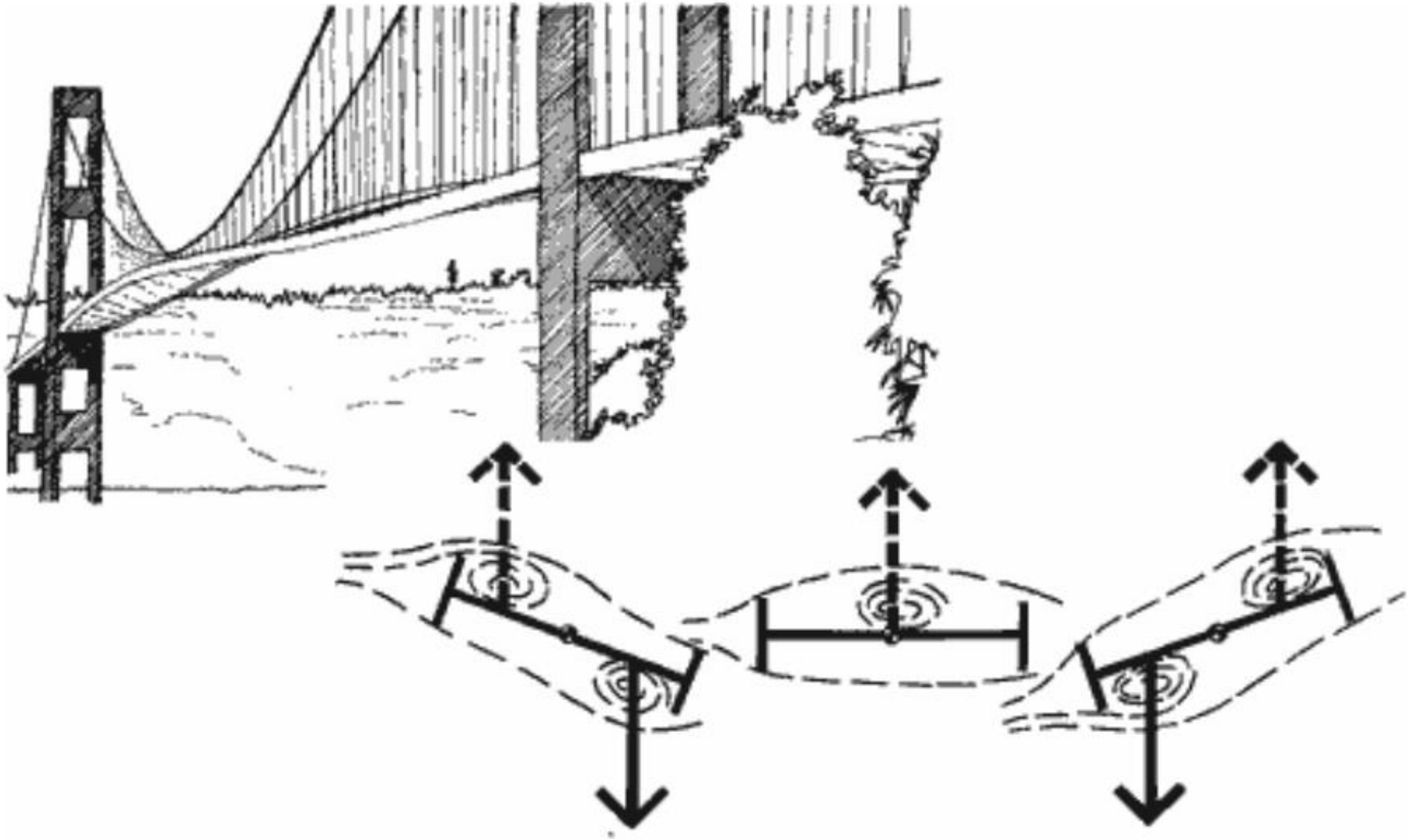
Introduzione

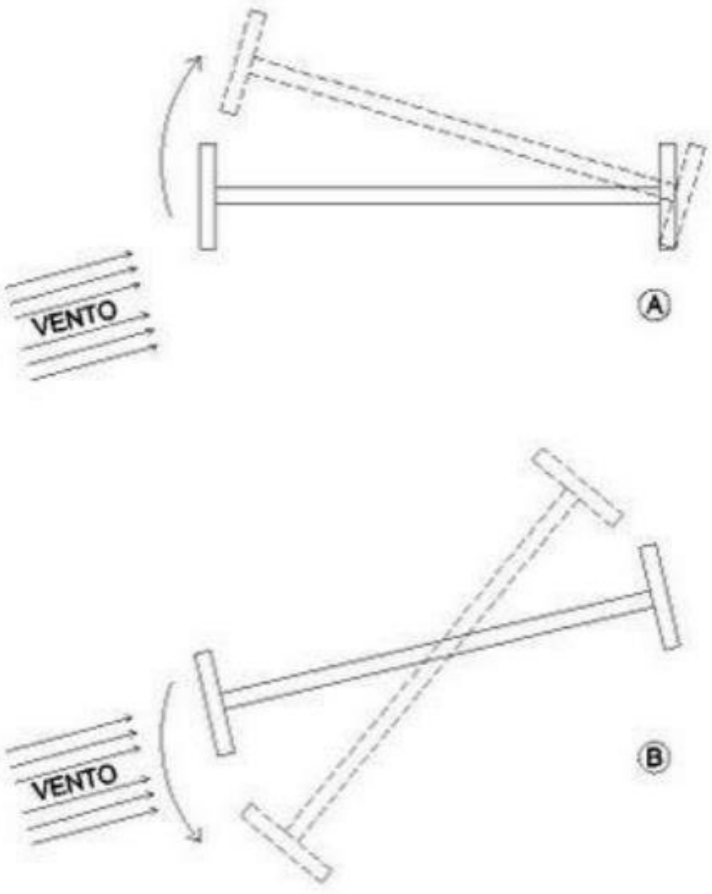


Introduzione

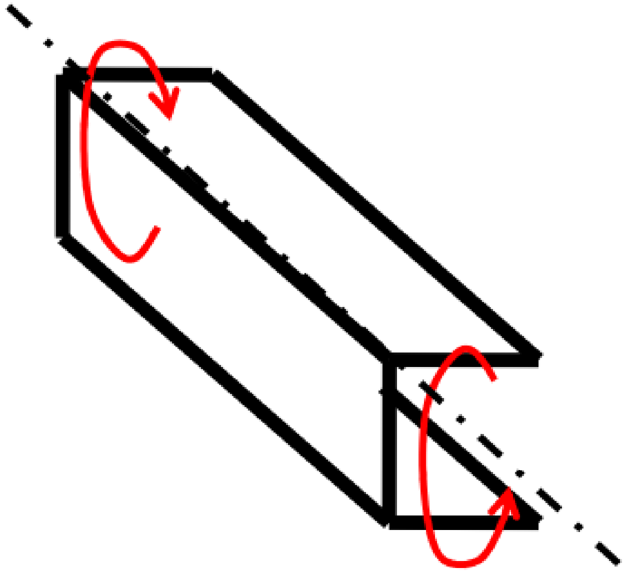
Introduzione







Introduzione

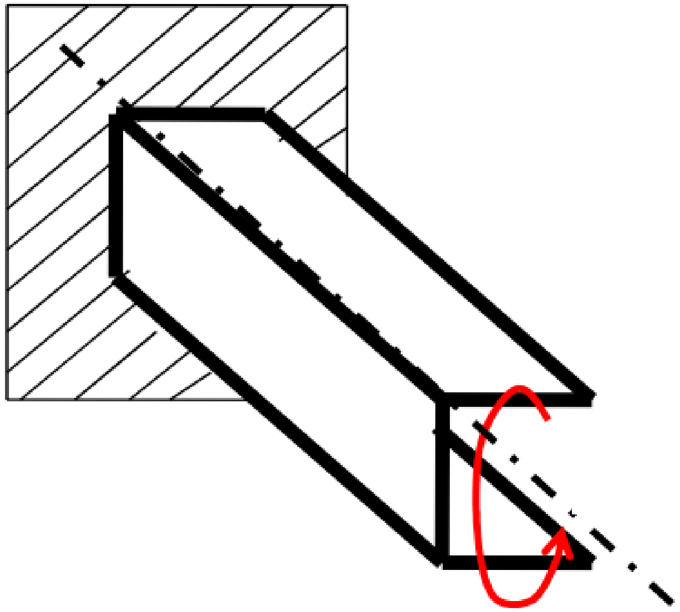


Ingobbamento: libero

Torsione primaria

Alla Saint Venant

- Angolo unitario di torsione costante
- Ingobbamento costante



impedito

Torsione secondaria

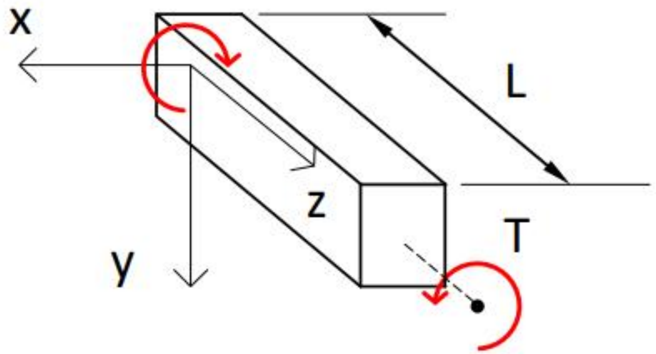
alla Vlasov

- Angolo unitario di torsione variabile
- Ingobbamento variabile

Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

- **Assenza di vincoli**
- Il cilindro è omogeneo e costituito da materiale elastico-lineare e isotropo
- Le forze di volume e le trazioni superficiali sulla superficie laterale sono nulle
- Le sole azioni esterne sono forze di superficie sulle due sezioni estreme, globalmente equilibrate

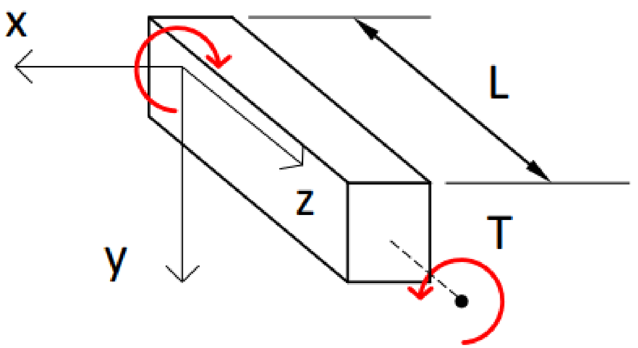
Barré de Saint-Venant 1797-1886



Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

Gli spostamenti dei punti della sezione sono :

$$s_x = -\theta y \qquad s_y = \theta x \qquad s_z = \theta' \psi(x, y)$$



dove :

ψ funzione di ingobbamento

θ rotazione torsionale

Nota!

Le sezioni si ingobbano tutte in egual misura, la torsione è uniforme !

… ciò comporta che le fibre non si deformano in direzione longitudinale.

Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

Il momento torcente vale :

$$T = GJ\,\theta'$$

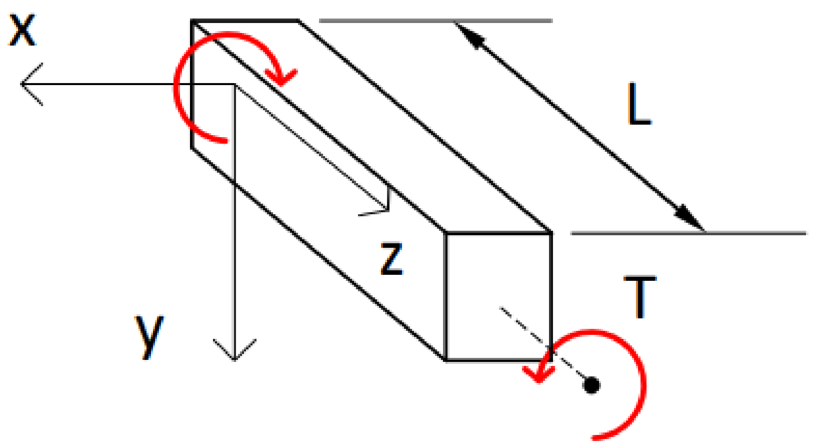
dove :

J	rigidità torsionale
θ’	angolo di torsione unitario

Nota! Per profili aperti in parete sottile la rigidità torsionale è approssimativamente ottenuta dalla relazione :

$$J = \frac{1}{3}\int_0^a b^3(s)ds$$

essendo
b lo spessore del profilo
a la lunghezza totale della linea media



La rotazione della sezione varia linearmente con z, raggiungendo il suo valore massimo all’estremo :

$$\theta(z) = \frac{T\,z}{GJ}$$

Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

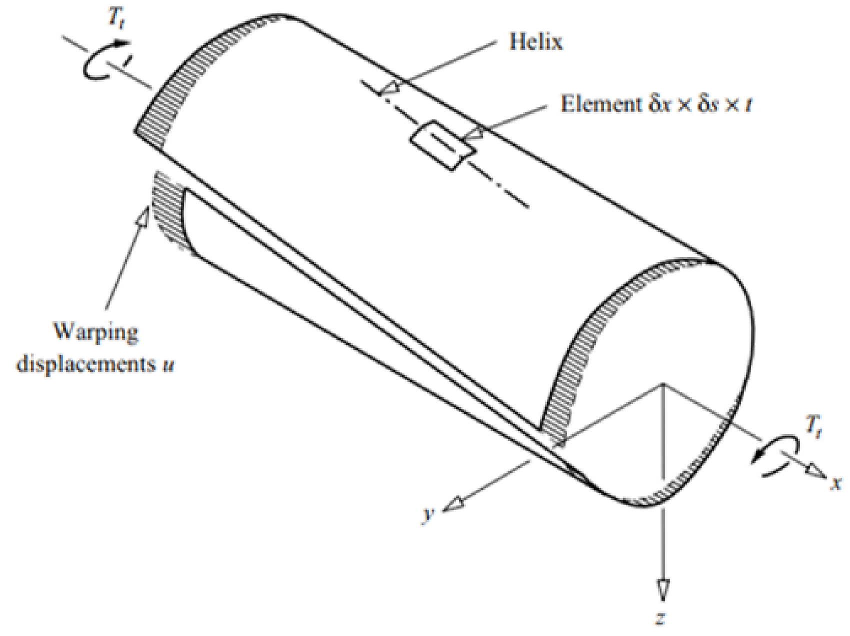
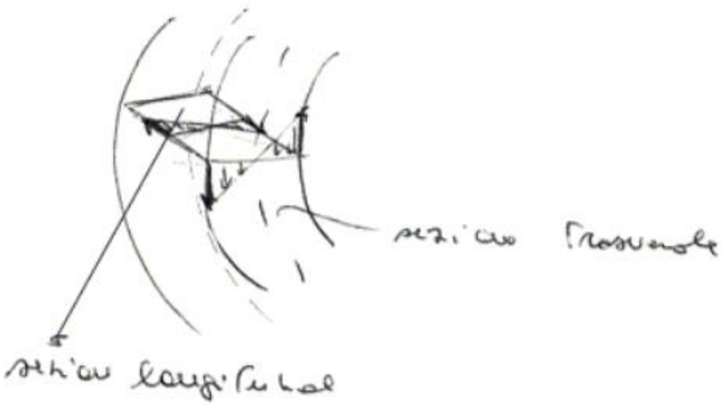
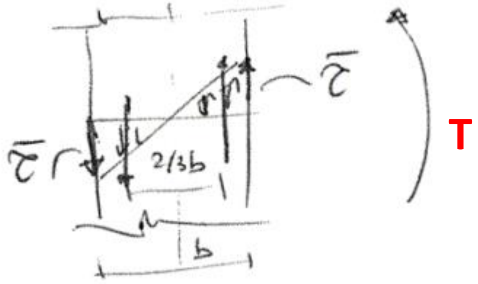


Figure 10.4 Warping displacements u due to twisting.

- Torsione nelle travi di sezione sottile aperta



– Sezione rettangolare:



– Sezione generica:

$$\bar{\tau} = \frac{T}{J_t} b = \frac{T}{J_t} b_{max}$$

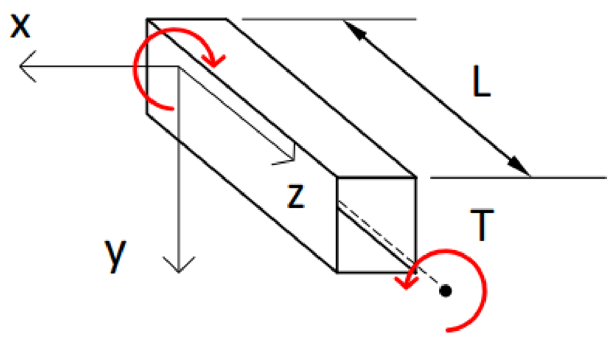
$$J_t = \frac{1}{3} \int_l b^3 \, ds = \frac{1}{3} \sum_i b_i^3 l_i$$

$$\bar{\tau} = \frac{T}{J_t} \cdot b \qquad J_t = \frac{1}{3} b^3 h \qquad \Rightarrow \qquad T = \left(\bar{\tau} \frac{b}{4}\right) \frac{2}{3} b$$

Centro di taglio: indicato con C_T è il punto che disaccoppia l'effetto del taglio dall'effetto del momento torcente (se il taglio passa per il centro di taglio, esso non crea momento torcente).

Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

Il legame tra il momento torcente ed il flusso delle tensioni tangenziali si ottiene per equilibrio e risulta:



$$T = \int_0^a q\, r(s)\, \mathrm{d}s = 2\,\mathrm{q}\,\Omega$$

dove: *s* è l'ascissa curvilinea che percorre la linea media a partire da un'origine arbitraria;
a è la lunghezza totale della linea media;
Ω è l'area racchiusa dalla linea media, ovvero: $\Omega = \frac{1}{2}\int_0^a r(s)\,\mathrm{d}s$

Se lo spessore è sottile, è lecito assumere che le τ_{zs} siano uniformemente distribuite sullo spessore. Quindi:

$$\tau_{zs} = \frac{q}{b(s)} = \frac{T}{2\,\Omega\, b(s)}$$ (formula di Bredt)

Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

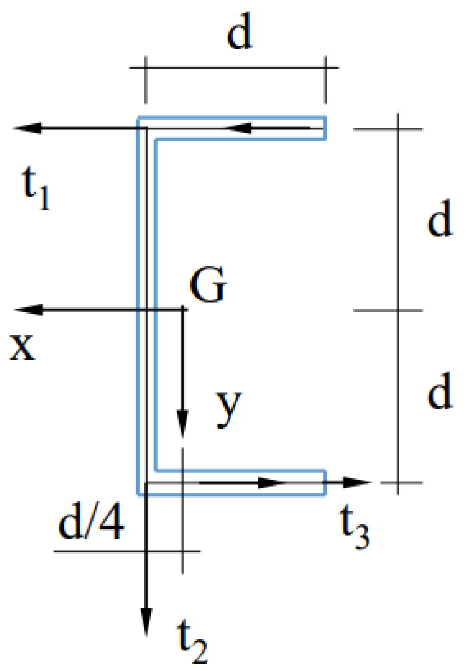
ESEMPIO 1

Le proprietà geometriche della sezione sono :

$$A = 4bd \qquad I_x = \frac{8}{3} b\, d^3$$

Inoltre :

$$J = \frac{4}{3} b^3 d \qquad \tau_{max} = \frac{T}{b\,J} = \frac{3}{4}\frac{T}{b^2 d}$$



La distanza r_G del baricentro dalla tangente alla linea media vale :

$$r_G = \begin{cases} d & 0 \le s \le d \\ d/4 & d \le s \le 3d \\ d & 3d \le s \le 4d \end{cases}$$

Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

ESEMPIO 1

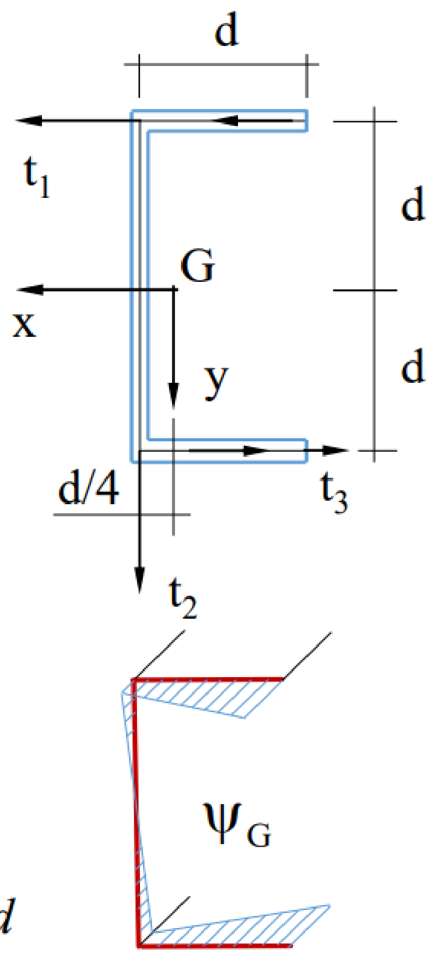
Si ha dunque:

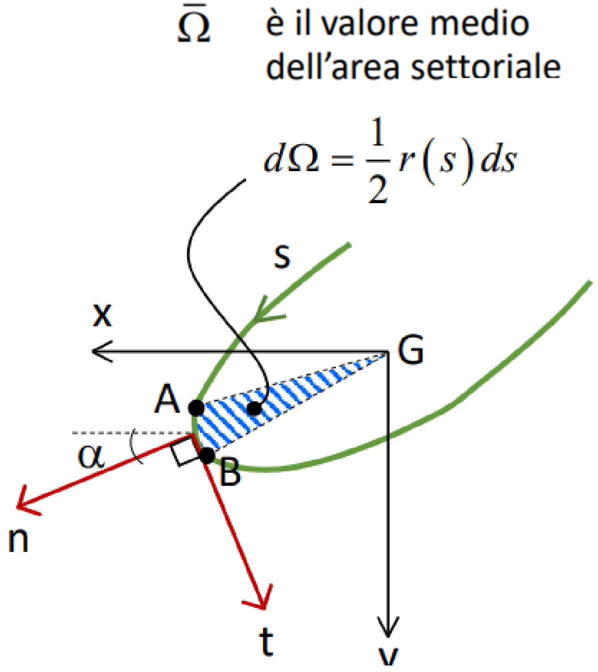
$$2\Omega_G(s)=\int_0^s r_G(s')\,ds'=\begin{cases} sd & 0\le s\le d\\ 3/4\cdot d^2+1/4\cdot sd & d\le s\le 3d\\ -3/2\cdot d^2+sd & 3d\le s\le 4d\end{cases}$$

$$2\bar{\Omega}_G=\frac{1}{4bd}\int_0^{4d}2\Omega_G(s')\,b\,ds'=\frac{5}{4}d^2$$

La funzione
d'ingobbamento vale :

$$\psi_G(s)=2\left[\bar{\Omega}_G-\Omega_G(s)\right]=\begin{cases} 5/4\cdot d^2-sd & 0\le s\le d\\ 1/2\cdot d^2-1/4\cdot sd & d\le s\le 3d\\ 11/4\cdot d^2-sd & 3d\le s\le 4d\end{cases}$$





Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

ESEMPIO 2

Le proprietà geometriche
della sezione sono :

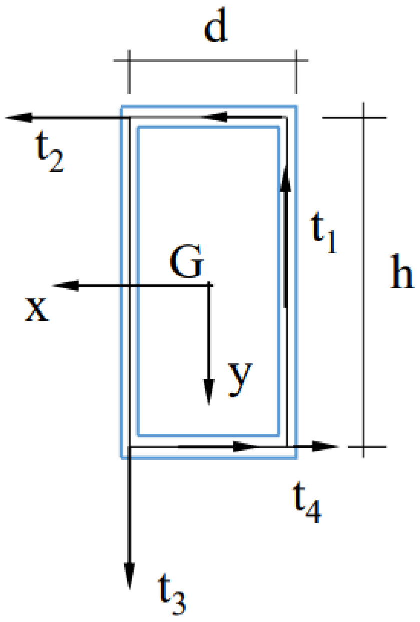
$$\Omega = h\,d \qquad a = 2(h+d)$$

$$\rho = \int_0^a \frac{ds}{b} = 2(h+d)/b$$

Inoltre :

$$J = \frac{4\Omega^2}{\rho} = 2\,\frac{d^2h^2b}{d+h}$$

$$\tau_{zs} = \frac{T}{2\Omega b} = \frac{1}{2}\,\frac{T}{b\,h\,d}$$



La distanza r_G del baricentro
dalla tangente alla linea media vale

$$r_G = \begin{cases} d/2 & i = 1,3 \\ h/2 & i = 2,4 \end{cases}$$

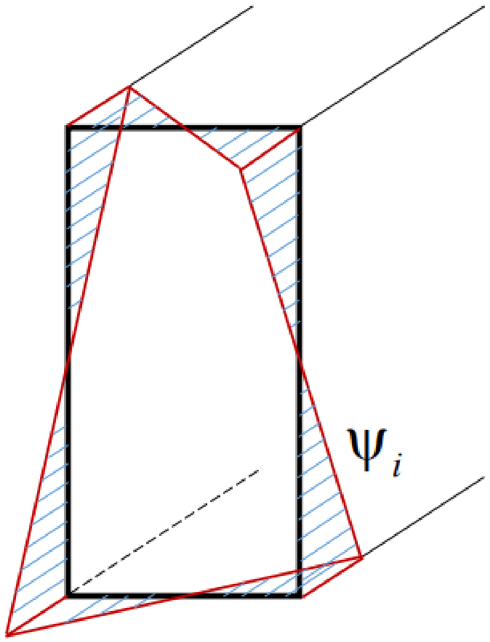
Torsione elastica primaria (De Saint Venant)

ESEMPIO 2

La funzione d'ingobbamento si calcola
mediante la relazione :

$$\psi(s) = \int_0^s \left(\frac{2\Omega}{\rho b} - r \right) ds' + \psi_0 = \int_0^s \left(\frac{dh}{d+h} - r \right) ds' + \psi_0$$

$$\psi_i = \begin{cases} \dfrac{d}{2}\dfrac{h-d}{h+d}\xi_i & i = 1, 3 \\[2ex] -\dfrac{h}{2}\dfrac{h-d}{h+d}\xi_i & i = 2, 4 \end{cases}$$



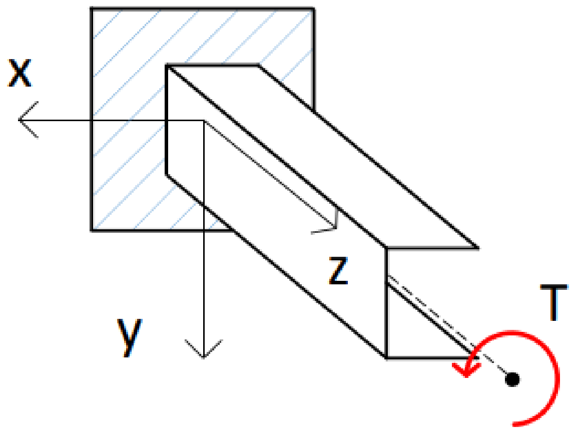
dove ξ indica la coordinata locale con origine nel
punto medio di ogni tratto

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

Si consideri una trave a sezione costante incastrata ad un estremo e sottoposta ad momento torcente.

Per l'equilibrio le tensioni trasmesse al vincolo danno luogo ad un momento torcente uguale e di verso opposto a quello sollecitante.

- **L'incastro di estremità impedisce lo spostamento longitudinale**
- **Lo spostamento in una sezione di coordinata z generica sarà funzione della distanza dall'incastro**
- **Le sezioni non si ingobbano tutte in egual misura, cioè la torsione è non uniforme**



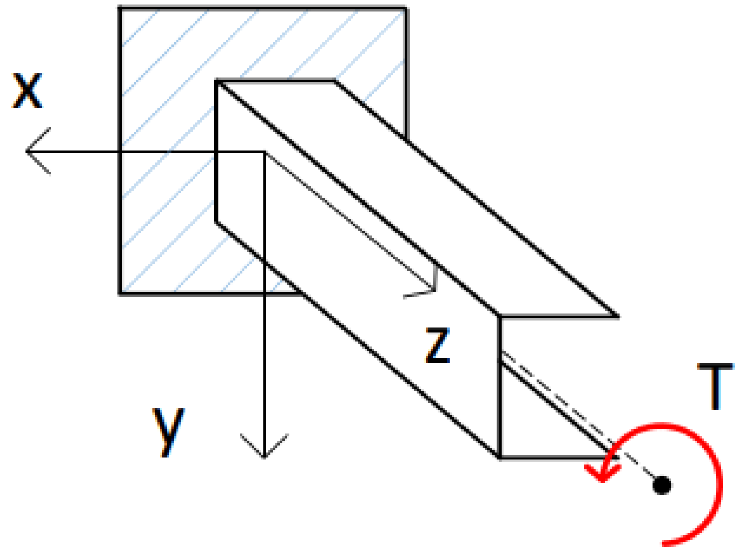
Torsione elastica secondaria (Vlasov)

Nella teoria di De Saint Venant (di solido caricato solo alle estremità) si assumono infatti due ipotesi fondamentali:

- **il momento torcente è costante lungo tutta la trave**
- **le sezioni sono libere di ingobbarsi e l'ingobbamento è uguale per tutte le sezioni**

Queste ipotesi sono, in realtà, difficili da soddisfare. Qualora dovesse mancarne una, occorre introdurre metodi alternativi per la valutazione del comportamento della trave.

Il mancato rispetto delle ipotesi conduce infatti ad uno stato tensione e deformativo diverso da quello di De Saint Venant, soprattutto in presenza di profili aperti (in genere questi effetti sono trascurabili per le sezioni composte).



Il momento torcente vale :

$$T = GJ\,\theta'$$

La rotazione della sezione varia linearmente con z, raggiungendo il suo valore massimo all'estremo :

$$\theta(z) = \frac{T\,z}{GJ}$$

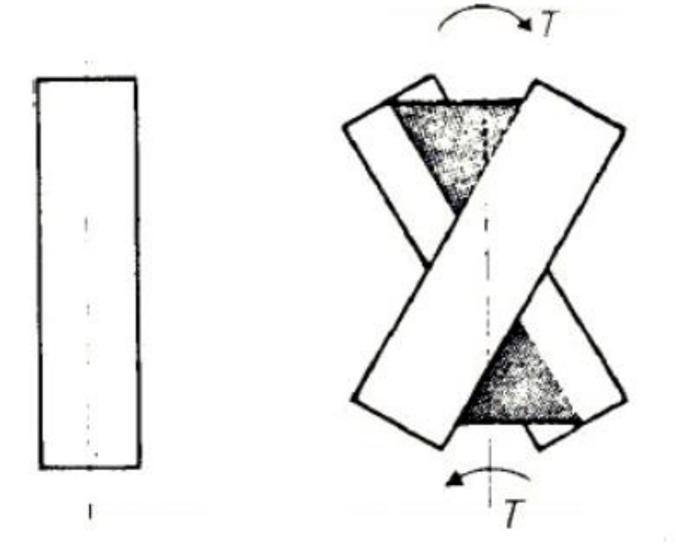


Figura 15.2: Situazione di torsione uniforme

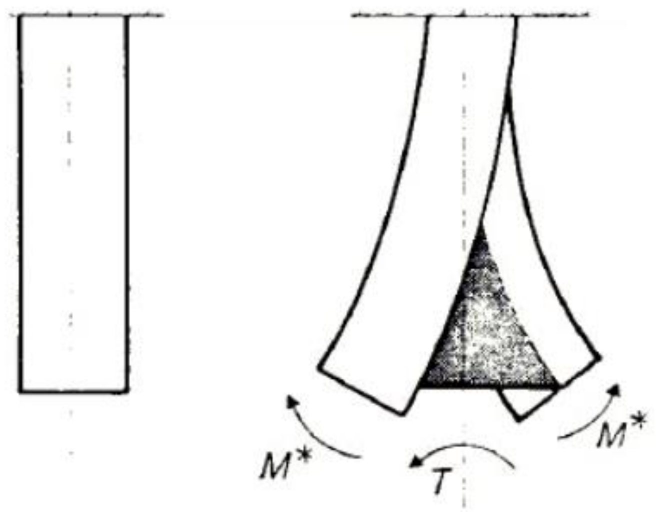


Figura 15.3: Situazione di torsione non uniforme

Per poter applicare la teoria di D.S.V. dovrei vincolare in modo da consentire l'ingobbamento ω. Ciò è possibile utilizzando un appoggio torsionale.

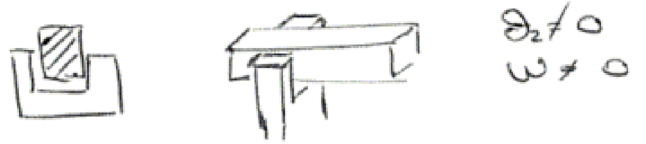
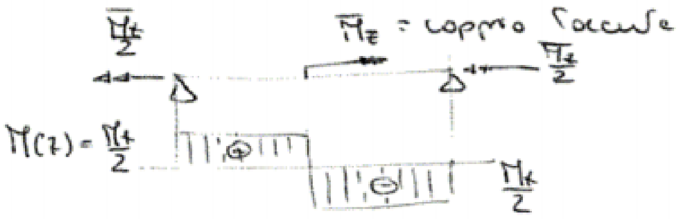
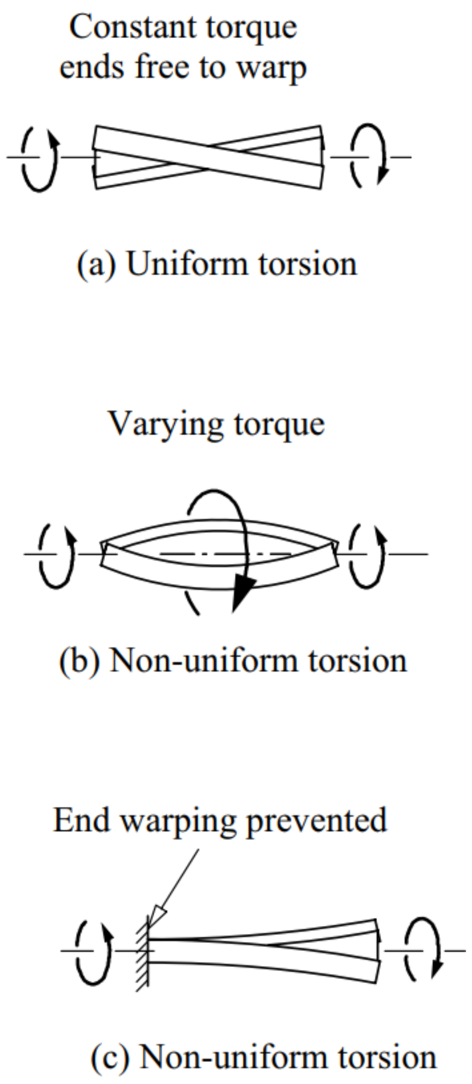


Figura 15.4: Appoggio torsionale

Alcuni casi in cui il momento torcente M_t non è costante lungo la trave:

- M_t applicato in mezzeria

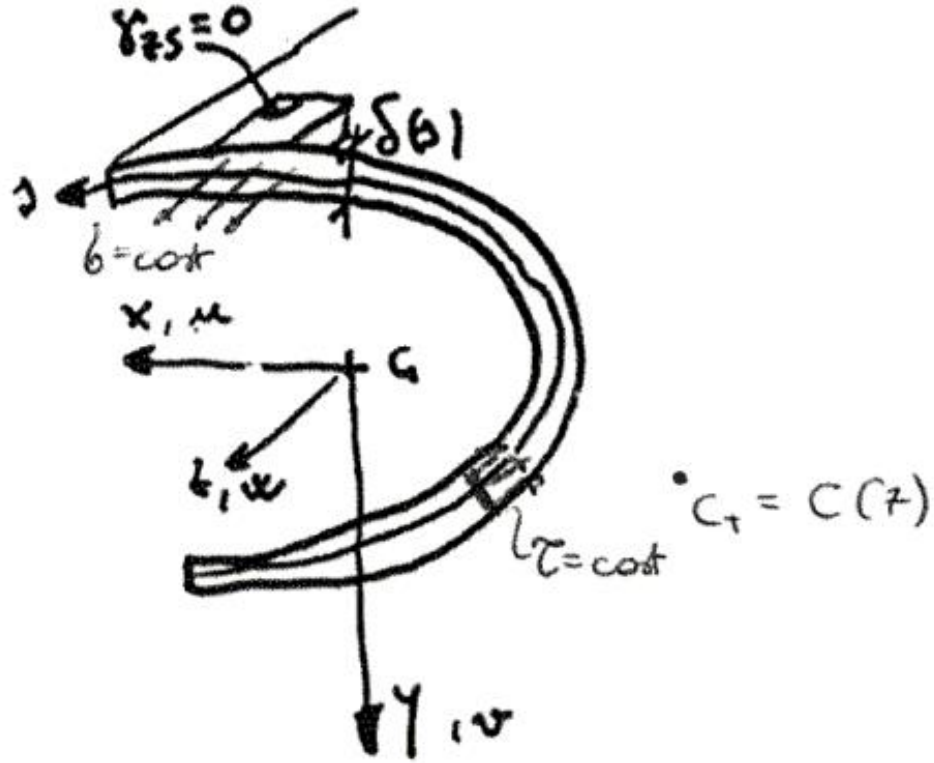




Torsione elastica secondaria (Vlasov)

La teoria più semplice sviluppata per lo studio di questi problemi è la teoria di Vlasov. Questa si basa su tre ipotesi:

1. indeformabilità trasversale della sezione a parete sottile ($\delta \geq 4 \div 5mm$) (cioè la sezione ruota come un rigido attorno a C_T);
2. struttura a parete sottile, quindi tensioni costanti;
3. assenza di scorrimenti γ_{zs} tra la direzione z che individua l'asse della trave e la generica direzione s della parete (assumendo $\gamma_{zs} = 0$ si irrigidisce la struttura);



A causa del vincolo che impedisce deformazioni e quindi provoca ingobbamento variabile, nascono sulla sezione tensioni normali σ_z aggiuntive

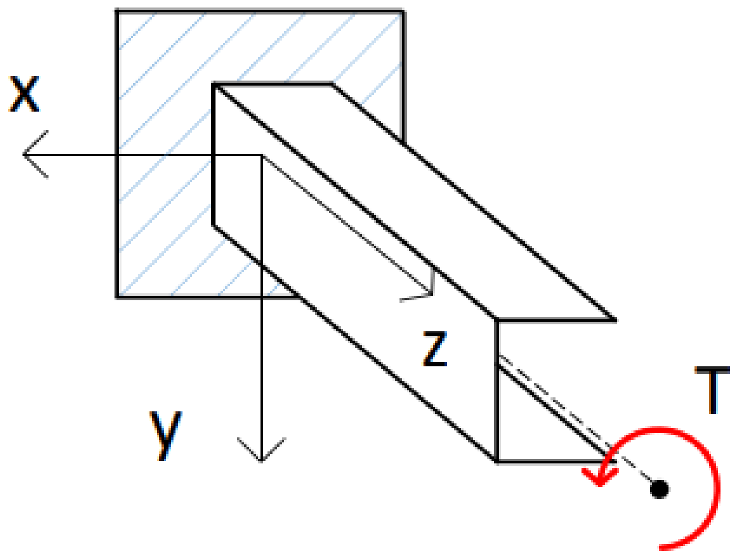
Torsione elastica secondaria (Vlasov)

Le componenti di spostamento si esprimono in questo caso come:

$$s_x = -\theta(z)\left[y(s) - y_c\right] \qquad s_y = \theta(z)\left[x(s) - x_c\right] \qquad s_z = \theta'(z)\,\psi(s)$$

dove :

x_c y_c coordinate del centro di taglio nel riferimento principale della sezione



L'espressione di $s_z = \theta'(z)\,\psi(s)$ dipende da z, quindi ....

le fibre subiscono deformazioni dirette in senso longitudinale :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial s_z}{\partial z} = \psi(s)\theta''(z)$$

La presenza di deformazioni longitudinali
comporta la presenza di tensioni normali σ_z :

$$\sigma(z) = E\,\varepsilon_z = E\,\psi(s)\,\theta''(z)$$

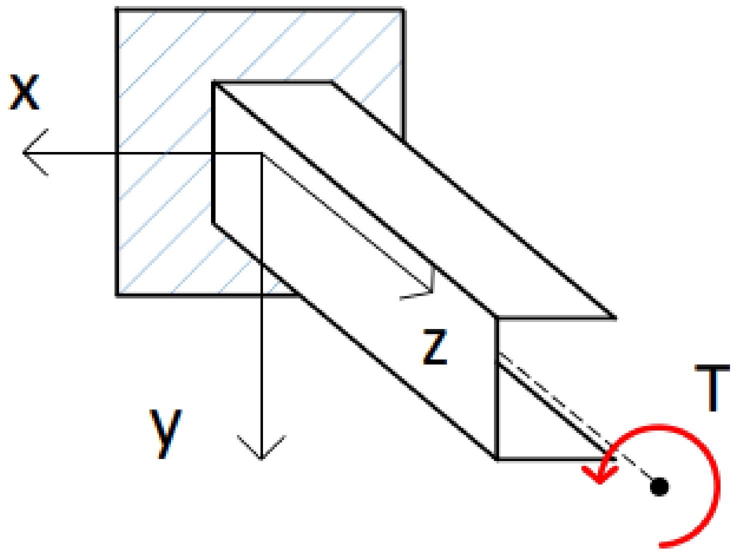
Le tensioni normali σ_z aggiuntive dovranno essere equilibrate da un ulteriore termine di tensione

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

La funzione di ingobbamento vale:

$$\psi(s) = 2\left[\bar{\Omega} - \Omega(s)\right]$$

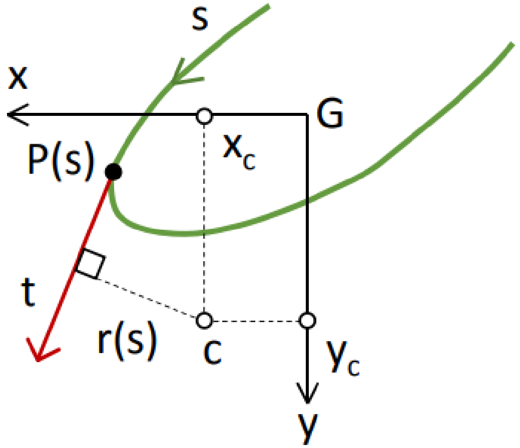
$\bar{\Omega}$ è il valore medio dell'area settoriale

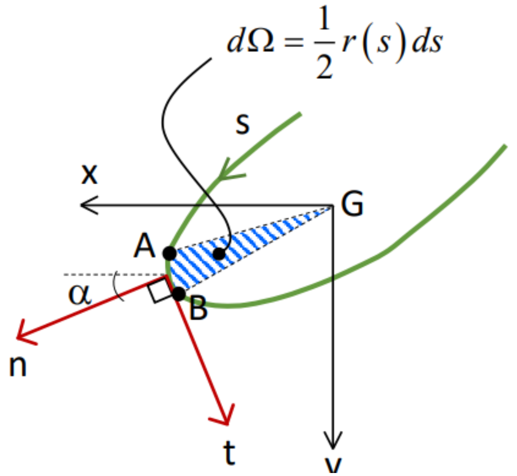


dove :

$$\Omega(s) = \frac{1}{2}\int_0^s r(s')ds' \qquad \bar{\Omega} = \frac{1}{A}\int_A \Omega dA$$

r(s) distanza dal centro di taglio della tangente alla linea media nel generico punto P(s).
Tale distanza si considera positiva se t provoca rotazione positiva intorno al centro di taglio.





Torsione elastica secondaria (Vlasov)

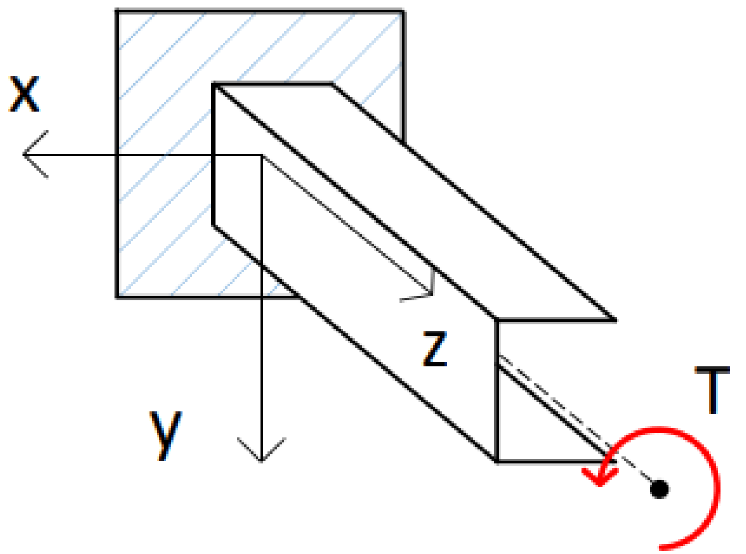
La funzione di ingobbamento gode delle seguenti proprietà

$$\int_A \psi dA = 0 \qquad \int_A x\psi dA = 0 \qquad \int_A y\psi dA = 0$$

Non ci può essere sforzo normale

Non ci può essere momento flettente intorno all'asse y

Non ci può essere momento flettente intorno all'asse x



Torsione elastica secondaria (Vlasov)

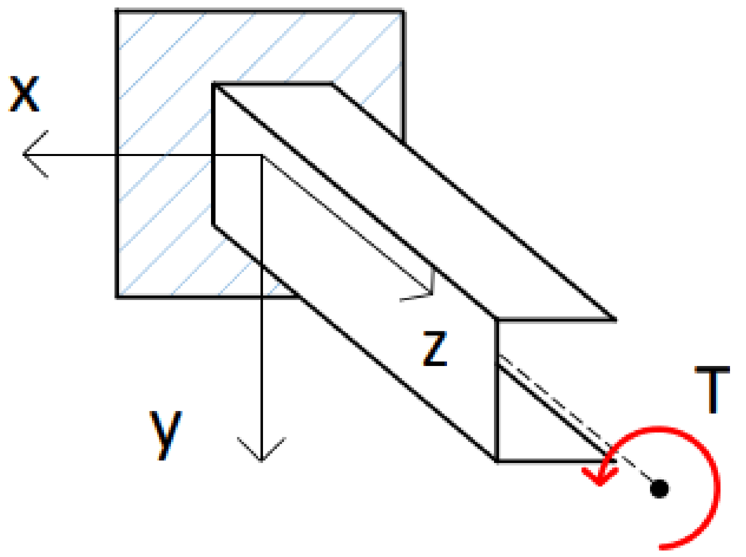
Le σ_z devono quindi costituire uno stato di autotensione, corrispondente ad azione assiale e momenti flettenti nulli.

Avendo assunto il centro di rotazione come centro di taglio, questa proprietà risulta verificata :

$$N = \int_A \sigma_z dA = E\theta'' \int_A \psi dA = 0$$

$$M_x = \int_A y\sigma_z dA = E\theta'' \int_A y\psi dA = 0$$

$$M_y = -\int_A x\sigma_z dA = -E\theta'' \int_A x\psi dA = 0$$

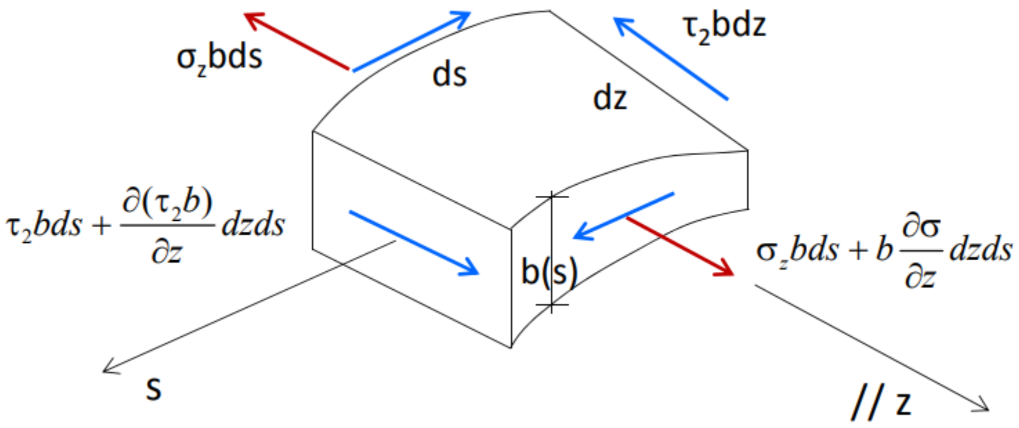


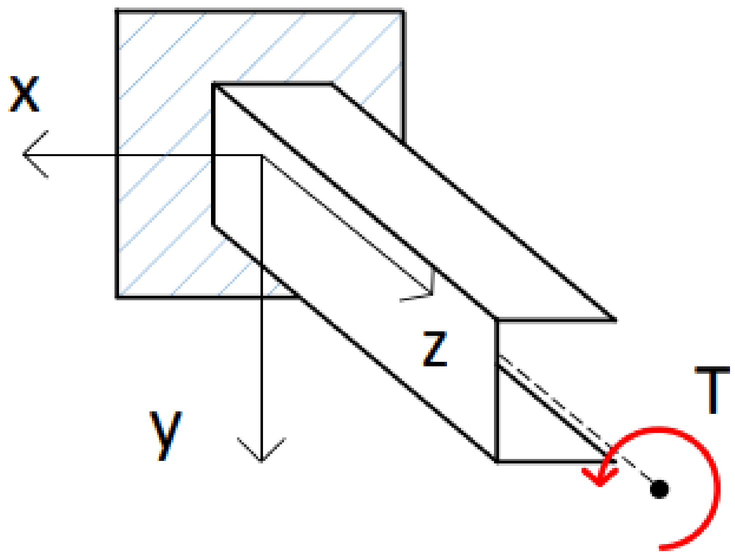
Le tensioni normali σ_z aggiuntive dovranno essere equilibrate da un ulteriore termine di tensione

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

Si consideri un elemento infinitesimo di trave. Data la piccolezza dello spessore, le σ_z sono assunte distribuite uniformemente su di esso.

Poiché esse variano lungo z, per l'equilibrio nascono delle tensioni tangenziali τ_2, dette secondarie, uniformi sullo spessore.

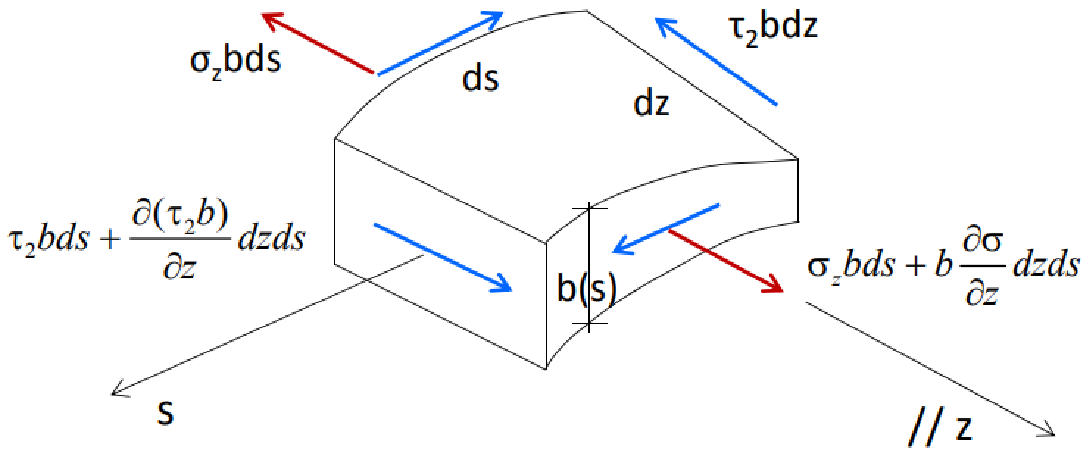


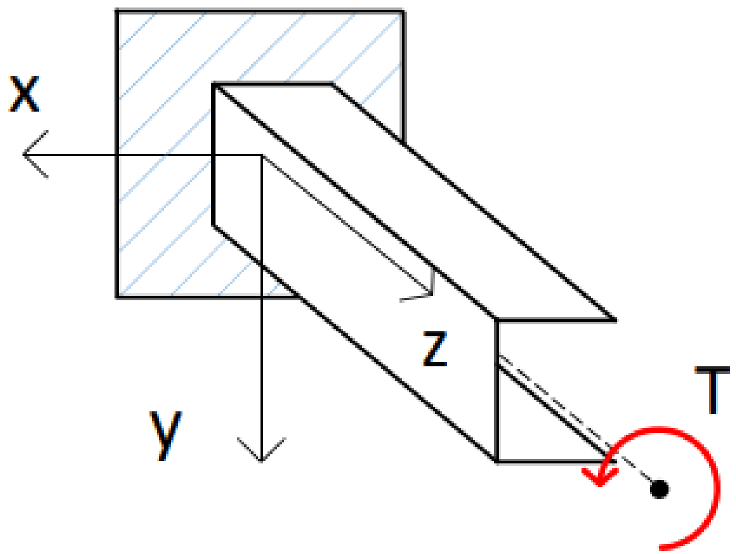


Torsione elastica secondaria (Vlasov)

L'equilibrio alla traslazione lungo l'asse *z* impone :

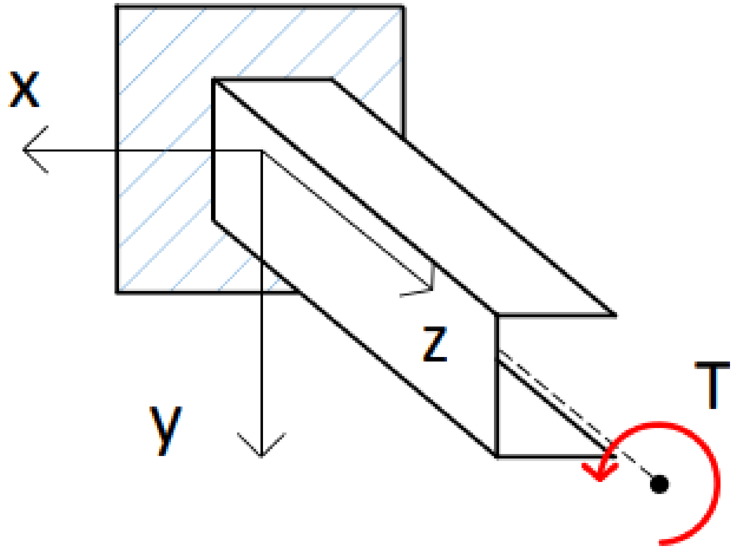
$$\frac{\partial(\tau_2 b)}{\partial s} = -b\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -Eb(s)\,\psi(s)\,\theta'''(z)$$





Torsione elastica secondaria (Vlasov)

$$\frac{\partial(\tau_2 b)}{\partial s} = -b\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = -Eb(s)\,\psi(s)\,\theta'''(z)$$



Il flusso $q=\tau_2 b$ delle tensioni tangenziali secondarie attraverso lo spessore può essere calcolato integrando la precedente relazione.

Se la superficie laterale è scarica, per l'equilibrio deve essere $\tau_2=0$. La costante di integrazione è quindi nulla e si ottiene :

$$q(s,z) = \tau_2 b = -E\theta'''(z)\int_0^s b(s')\psi(s')ds'$$

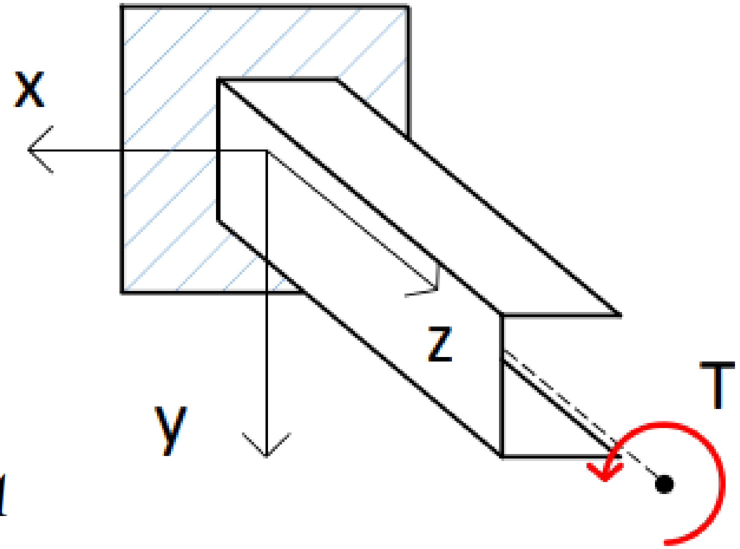
A tale flusso non corrispondono azioni taglianti.

Le tensioni tangenziali secondarie che nascono per riequilibrare le tensioni normali σ_z aggiuntive (dovute a ingobbamento impedito) danno origine a un BIMOMENTO (o momento torcente secondario «alla Vlasov»)

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

Tale flusso dà luogo ad un momento torcente T_2

$$T_2 = \int_0^a qrds = -E\theta'''(z)\int_0^a \left[\int_0^s b(s')\psi(s')ds'\right] r(s)ds$$



dove :

$$\Gamma = \int_0^a \left[\int_0^s b(s')\psi(s')ds'\right] r(s)ds$$

è una proprietà geometrica della sezione,
detta **rigidità di ingobbamento** (*warping rigidity*).

$$\Gamma = \int_A \psi^2 dA$$

(a torsione secondaria)

Quindi $T_2 = -E\,\Gamma\,\theta'''(z)$ = **momento torcente secondario**

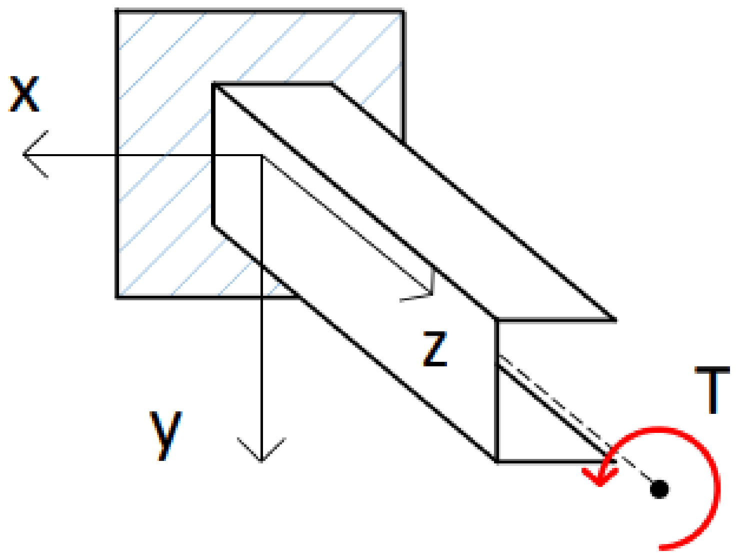
(o BIMOMENTO, o momento torcente secondario «alla Vlasov»)

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

Il momento torcente totale è dato dalla somma del momento torcente primario (alla DSV) e del momento torcente secondario (alla VLASOV)

Il momento torcente secondario T_2
rappresenta il contributo degli effetti del vincolo.

Sommato al momento primario T_1 , corrispondente alle tensioni tangenziali date dalla soluzione di De Saint Venant, equilibra in ogni sezione la coppia applicata all'estremo della mensola :



$$T = T_1 + T_2 = GJ\,\theta'(z) - E\,\Gamma\,\theta'''(z)$$

Nota!

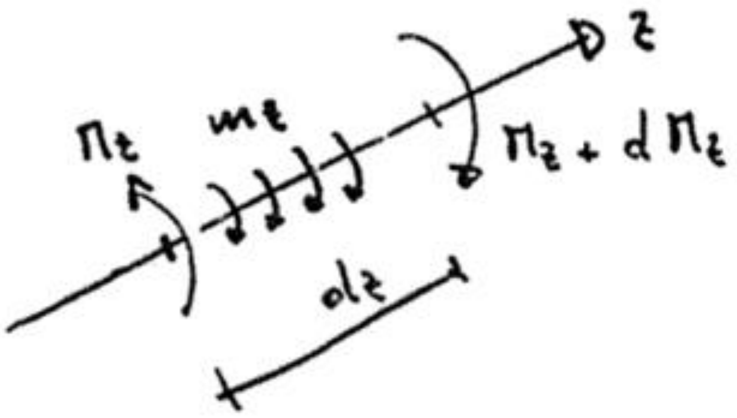
I due contributi hanno importanza relativa diversa nelle diverse sezioni.
L'effetto del vincolo diminuisce con la distanza dal vincolo stesso.

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

E' possibile estendere i risultati anche ad una trave soggetta a momento torcente distribuito m_t per unità di lunghezza.

Per l'equilibrio alla rotazione di un elemento infinitesimo di trave si ha :

$$dT/dz = -m_t$$



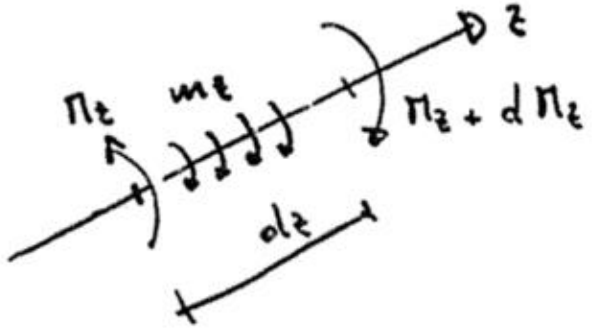
Derivando l'equazione fondamentale della torsione $T(z) = G\,J\,\theta'(z) - E\,\Gamma\theta'''(z)$, si ottiene :

$$m_t = E\,\Gamma\,\theta''''(z) - G\,J\,\theta''(z)$$

Questa equazione differenziale, lineare a coefficienti constanti, governa il comportamento torsionale dei profili aperti. Il suo integrale generale dipende da quattro costanti di integrazione, determinate dalle condizioni al contorno.

La rigidità di ingobbamento viene indicata come Γ oppure anche come I_ω

Torsione elastica secondaria (Vlasov)



che si può riscrivere come:

$$\theta^{VI} - \frac{GJ_d}{EJ_\omega}\theta'' = \frac{m_z}{EJ_\omega} \qquad (15.21)$$

(analogamente alla flessione $EJ\eta^{IV} = q$)
Per risolvere questa equazione differenziale è utile introdurre k: il rapporto tra rigidezza primaria e secondaria, che indica numericamente quanto sia preponderante la teoria di Vlasov su quella di D.S.V.

$$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot J_d}{E \cdot J_\omega}} \qquad (15.22)$$

La 15.21 si può quindi porre nella forma:

$$\theta^{IV} - \left(\frac{k}{l}\right)^2 \theta'' = \frac{m_z(z)}{EJ_\omega} \qquad (15.23)$$

che sviluppata porta a:

$$\theta = \theta_p + C_1 + C_2\frac{z}{l} + C_3 \sinh\left(k\frac{z}{l}\right) + C_4 \cosh\left(k\frac{z}{l}\right)$$

dove θ_p rappresenta la soluzione dell'integrale particolare (dipendente dal carico) e gli altri termini la soluzione dell'omogenea associata con le costanti C_1, C_2, C_3 e C_4 incognite.

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

Quindi le condizioni al contorno le impongo analogamente al problema flessionale:

Appoggio → *Appoggio torsionale*

$\eta = 0 \rightarrow \theta = 0$

$\eta'' = M = 0 \rightarrow \theta'' = B = 0$

Incastro → *Incastro torsionale*

$\eta = \eta' = 0 \rightarrow \theta = \theta' = 0 \;\; (W = 0)$

Estremo libero → *Estremo libero*

$\eta' = \eta'' = 0 \rightarrow \theta' = \theta'' = 0$

$M = T = 0 \rightarrow B = M_\omega = 0$

Continuita' → *Continuita'*

$M_s = M_d \rightarrow B_s = B_d$

$T_s = T_d \rightarrow M_{\omega,s} = M_{\omega,d}$

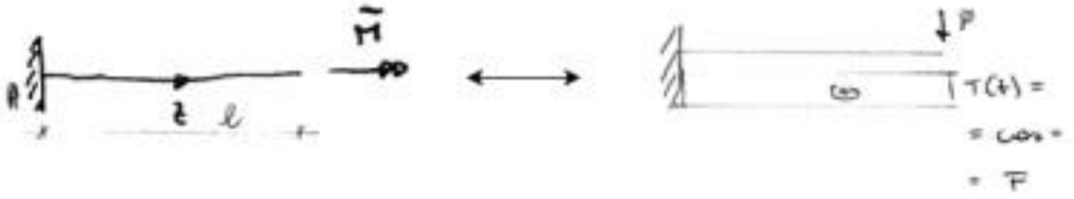
$\eta_s = \eta_d \rightarrow \theta_s = \theta_d$

$\eta'_s = \eta'_d \rightarrow \theta'_s = \theta'_d$

Con queste condizioni posso quindi risolvere l'equazione 15.23 e pervenire alla soluzione del problema.

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

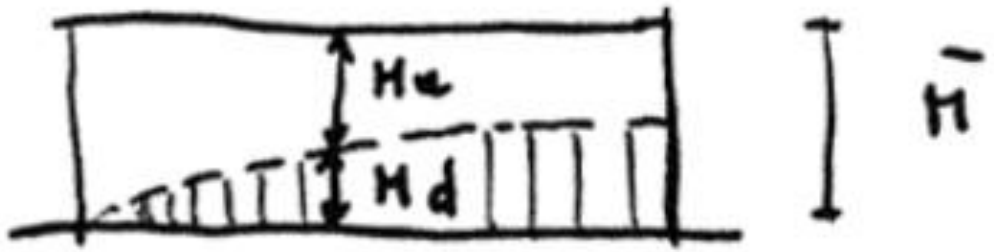
Esempio di trave con incastro torsionale



In A sarà $\theta = \theta' = 0$, $B = 0$ e $M_z = \bar{M}$.
Si ha

$$M_z = M_\omega + M_d = -EJ_\omega\theta'''(l) + GJ_d\theta'(l) = \bar{M}$$

si nota quindi come in A tutto il torcente M_t sia dovuto a M_ω.



La quota tra M_ω e M_d a regime dipende da

$$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot J_d}{E \cdot J_\omega}}$$

Possiamo dare dei valori indicativi di questo parametro:

$k = 0 \div 0,5$ (EJ_ω molto alti) profili laminati a freddo, prevale M_ω;

$k = 0,5 \div 2$ laminati o saldati, prevale ancora M_ω;

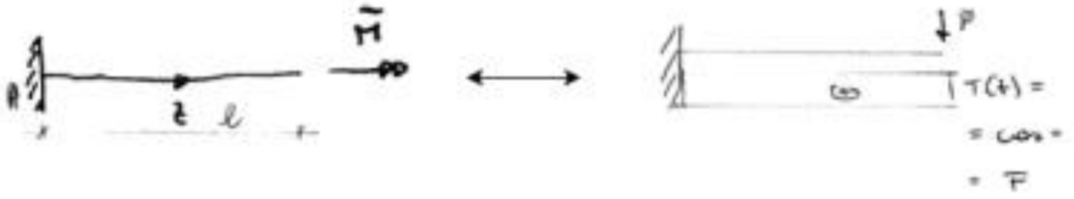
$k = 2 \div 5$ torsione mista (molto frequente), laminati a caldo, impalcati da ponte;

$k = 5 \div 20$ prevale la torsione uniforme (sezioni tubolari o molto tozze);

$k > 20$ torsione alla D.S.V. (sezioni compatte piene);

Torsione elastica secondaria (Vlasov)

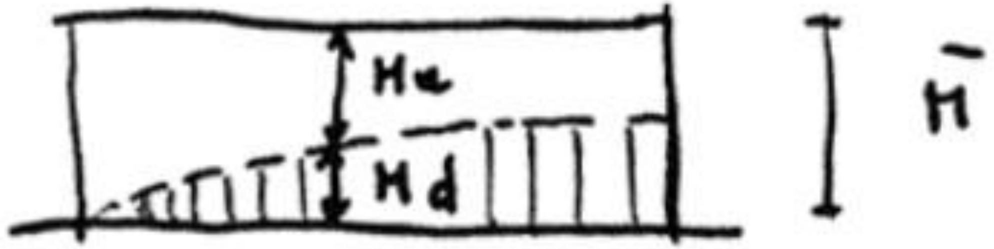
Esempio di trave con incastro torsionale



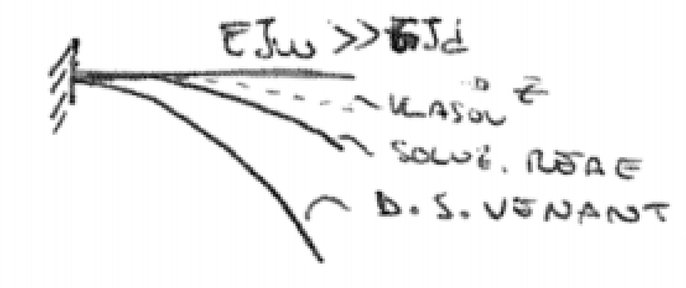
In A sarà $\theta = \theta' = 0$, $B = 0$ e $M_z = \bar{M}$.
Si ha

$$M_z = M_\omega + M_d = -EJ_\omega\theta'''(l) + GJ_d\theta'(l) = \bar{M}$$

si nota quindi come in A tutto il torcente M_t sia dovuto a M_ω.



Quindi quando $EJ_\omega \gg GJ_d$ avremo situazioni del tipo:



In Vlasov $\gamma_{sz} = 0$ quindi la soluzione risulta più rigida di quella reale ma molto vicina. D.S.V. invece ha una rigidezza più bassa quindi grandi rotazioni significativamente discoste dalla realtà.

Si nota quindi come sia influente tale teoria nelle strutture in acciaio. Un'ulteriore considerazione è da fare in merito alla forma delle sezioni: tutte quelle sezioni in cui il centro di taglio cade nell'intersezione delle linee medie dei vari segmenti portano ad avere $J_\omega = 0$.

Tipi di sezione

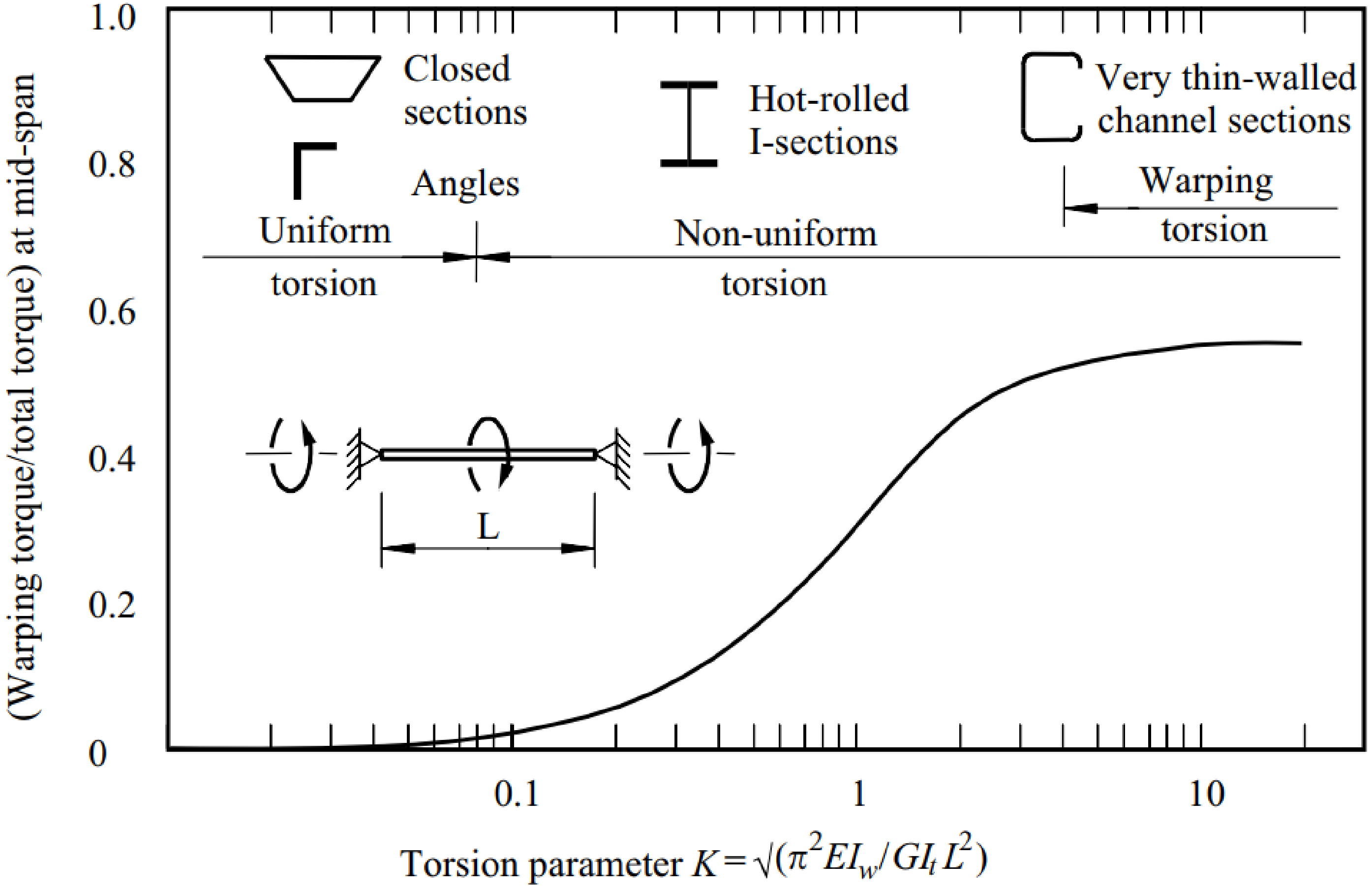
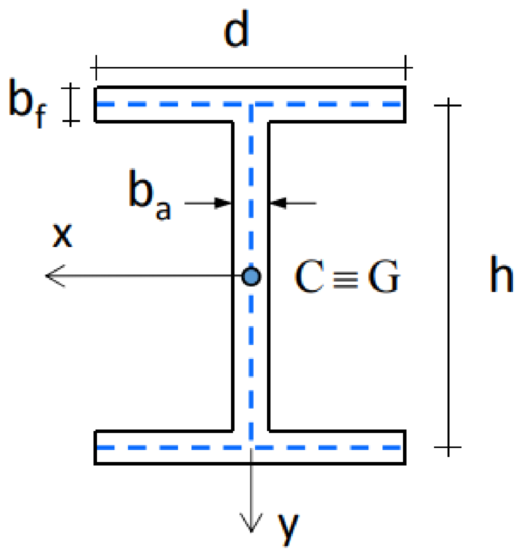


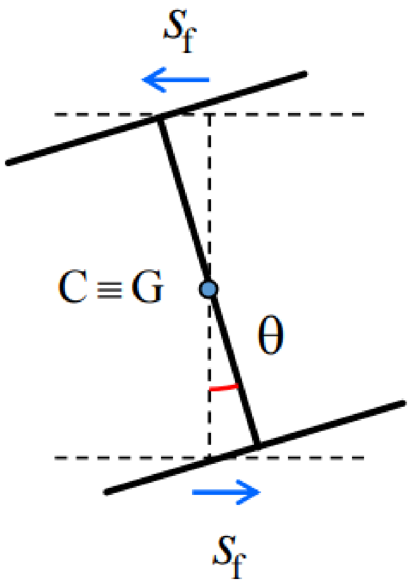
Figure 10.2 Effect of cross-section on torsional behaviour.

Esempio per un profilato a doppio T

il centro di taglio coincide con il baricentro della sezione.

Se la sezioni ruota di un angolo θ intorno a questo punto, le flange subiscono uno spostamento orizzontale s_f :





$$s_f(z) = \frac{h}{2}\theta(z)$$

essendo,

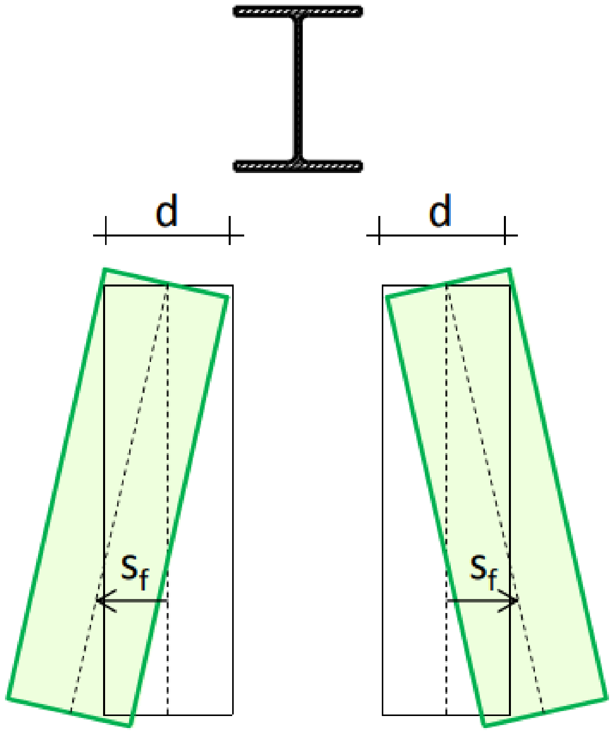
più in generale :

$$s_x(z) = y\,\theta(z)$$

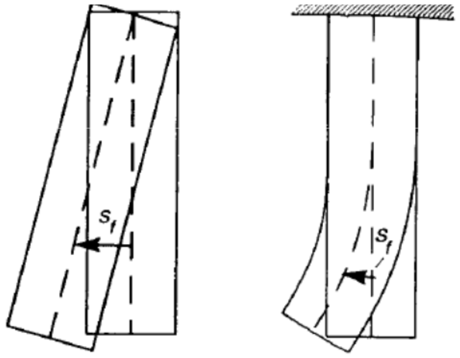
Esempio per un profilato a doppio T

Se le sezioni fossero libere di ingobbarsi,
si avrebbe una rotazione rigida delle flange nel proprio piano.

Ala superiore



Ala inferiore



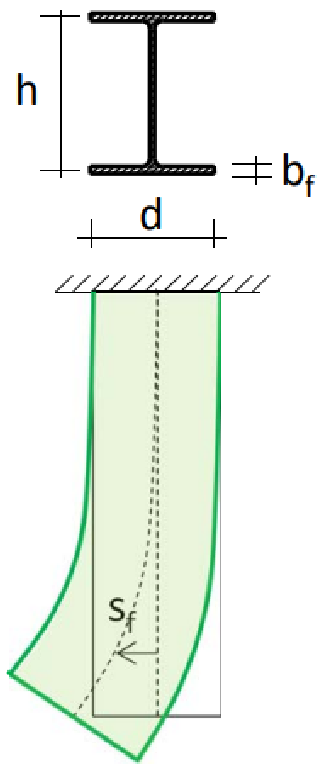
Rotazione libera

Rotazione impedita all'incastro

Esempio per un profilato a doppio T

Per la presenza dell'incastro,
la flangia si inflette e tale inflessione è contrastata
dalla rigidezza legata al momento d'inerzia della flangia I_f :

$$I_{\mathrm{f}} = \frac{1}{12} b_{\mathrm{f}} d^3$$

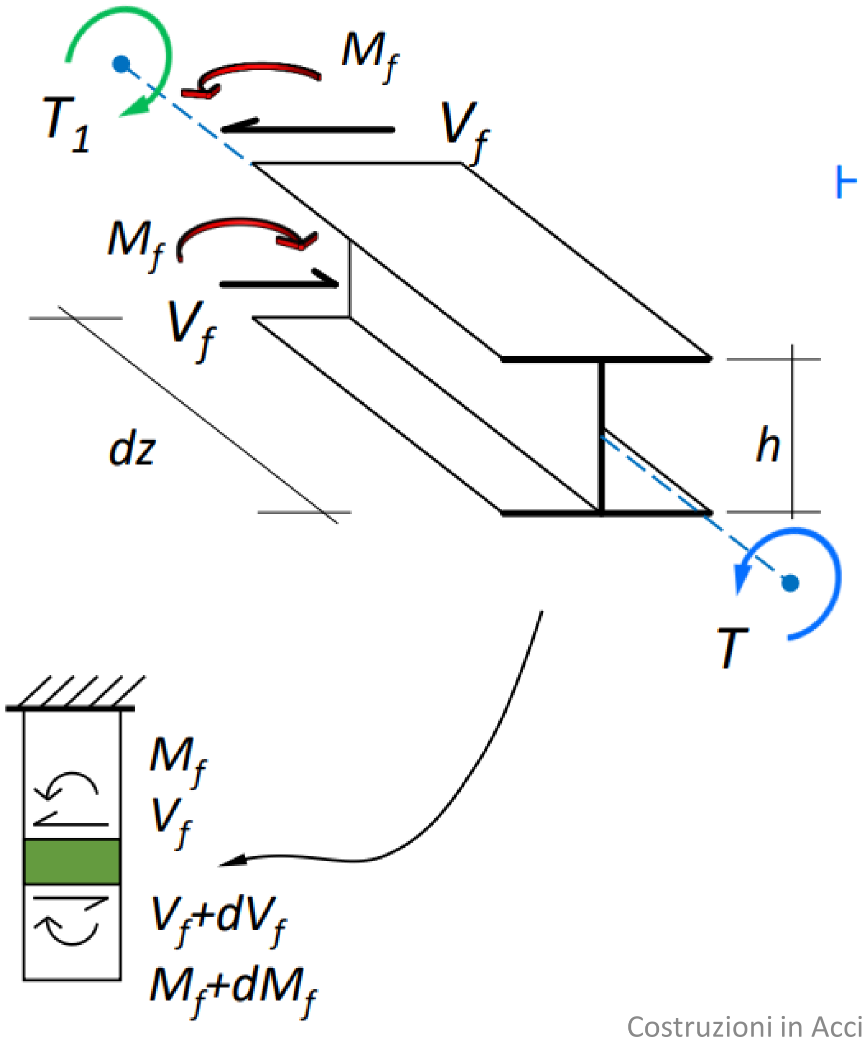


Nella flangia saranno presenti
momenti flettenti

$$M_{\mathrm{f}}(z) = EI_{\mathrm{f}} \frac{d^2 s_{\mathrm{f}}}{dz^2} = E \frac{b_{\mathrm{f}} d^3 h}{24} \theta''$$

e sforzi di taglio $$V_{\mathrm{f}}(z) = E \frac{b_{\mathrm{f}} d^3 h}{24} \theta'''$$

Esempio per un profilato a doppio T



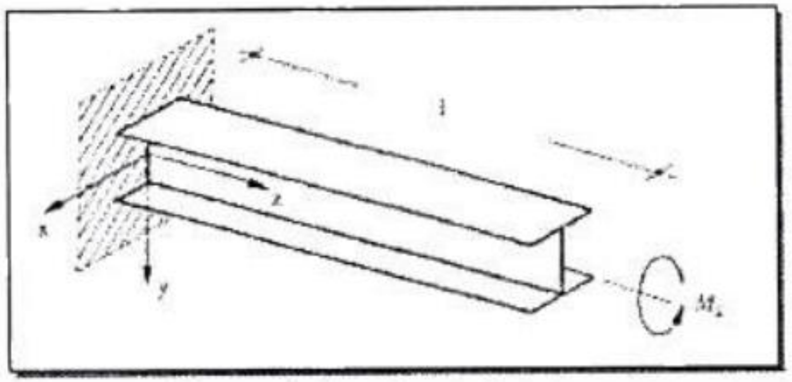
Sulla sezione sono presenti :

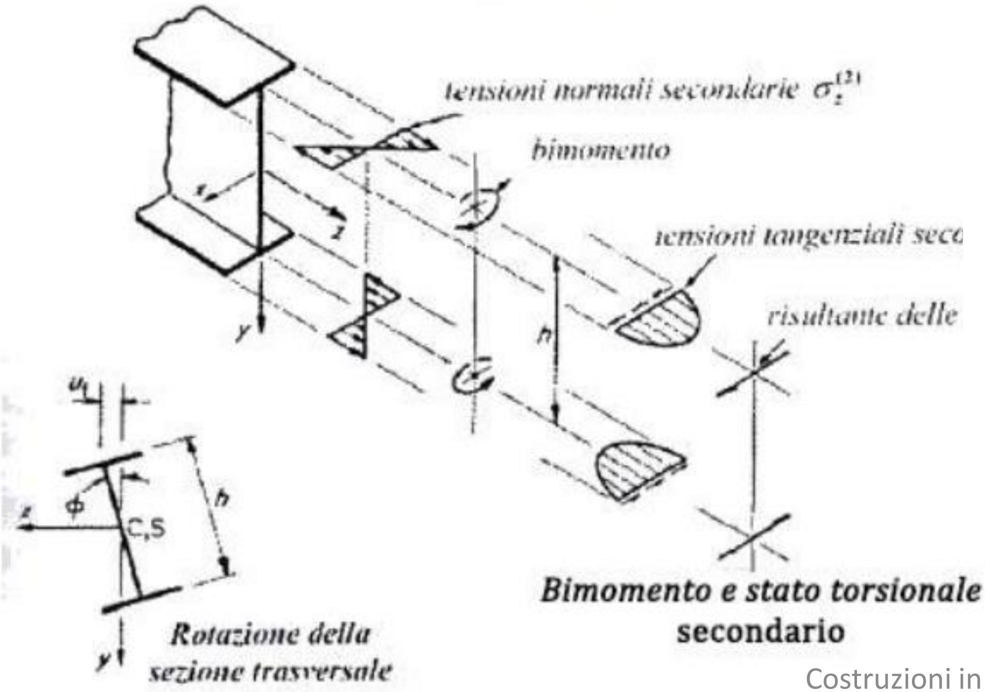
- tensioni tangenziali conseguenti a T_1
- tensioni normali da momenti di flangia M_f
- tensioni tangenziali da tagli di flangia V_f

e …

$$T = T_1 - V_f\, h$$

Esempio per un profilato a doppio T





Sulla sezione sono presenti :

- tensioni tangenziali conseguenti a T_1
- tensioni normali da momenti di flangia M_f
- tensioni tangenziali da tagli di flangia V_f

e ...

$$T = T_1 - V_f\, h$$

Esempio per un profilato a doppio T

Il primo addendo è il momento torcente secondo De Saint Ven

$$T_1 = G\,J\,\theta'(z)$$

dove :

$J = \frac{1}{3}\left(h\,b_a^3 + 2d\,b_f^3\right)$ è la rigidità torsionale primaria per la sezione

… il secondo addendo è il momento torcente secondario :

$$T_2(z) = -V_f(z)h = -E\,\Gamma\,\theta'''(z)$$

dove :

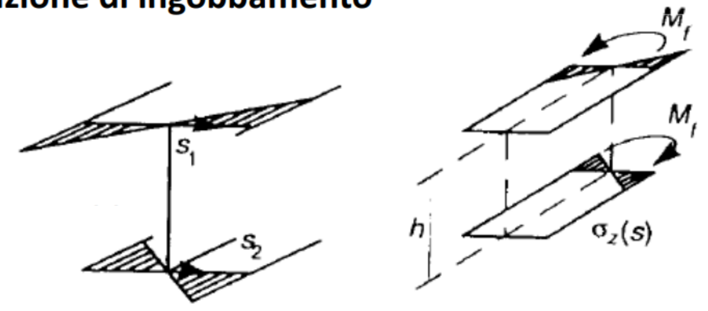
$\Gamma = \dfrac{b_f d^3 h^2}{24}$ è la rigidità di ingobbamento per la sezione

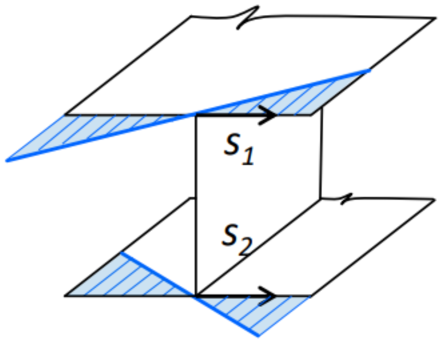
Esempio per un profilato a doppio T

La funzione d'ingobbamento vale :

$$\psi(s) = \begin{cases} -(h/2)\, s_1 & \text{flangia superiore} \\ 0 & \text{anima} \\ (h/2)\, s_2 & \text{flangia inferiore} \end{cases}$$

Le tensioni normali risultano proporzionali alla funzione di ingobbamento





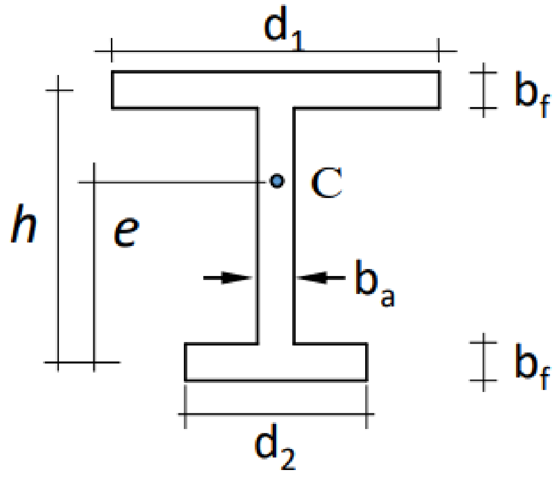
Si definisce *bimomento* la quantità :

$$B = E\,\Gamma\,\theta''$$

Nella sezione a I,
il bimomento è pari al prodotto dei momenti di flangia per la distanza tra le flange stesse, ovvero :

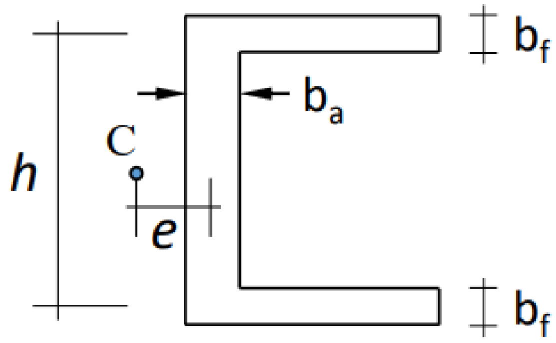
$$B = M_f\, h$$

Esempio per altri profili



$$e = h\frac{d_1^3}{d_1^3 + d_2^3}$$

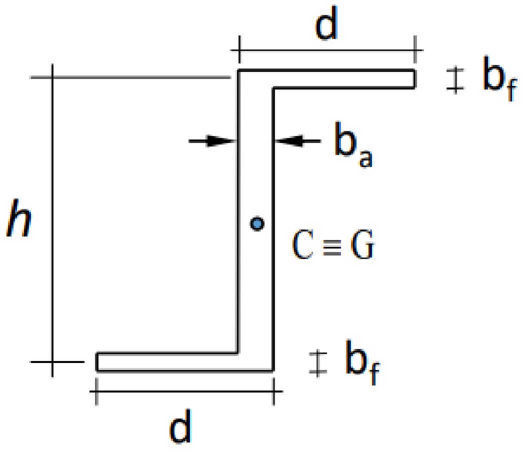
$$J = \frac{1}{3}\left[hb_a^3 + (d_1 + d_2)b_f^3\right] \qquad \Gamma = \frac{b_f h^2}{12}\frac{d_1^3 d_2^3}{d_1^3 + d_2^3}$$



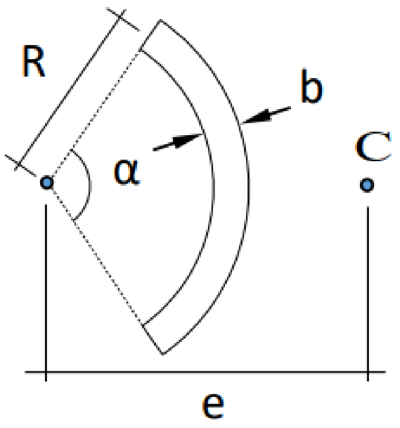
$$e = \frac{3b_f d^3}{6b_f d + hb_a}$$

$$J = \frac{1}{3}\left(hb_a^3 + 2db_f^3\right) \qquad \Gamma = \frac{b_f d^3 h^2}{12}\frac{3db_f + 2hb_a}{6db_f + hb_a}$$

Esempio per altri profili



$$J = \frac{1}{3}\left(h b_a^3 + 2 d b_f^3\right) \qquad \Gamma = \frac{b_f h^2}{12}\frac{d_1^3 d_2^3}{d_1^3 + d_2^3}$$



$$e = 2R\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

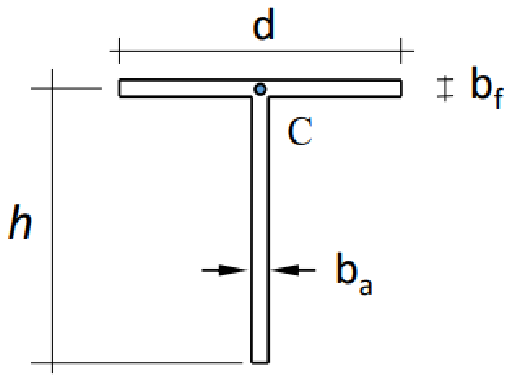
$$J = \frac{2}{3}\alpha R b^3 \qquad \Gamma = \frac{2}{3} b R^5\left[\alpha^3 - \frac{6\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha\right)^2}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right]$$

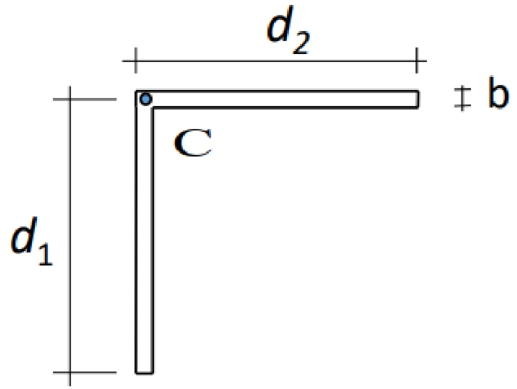
Esempio per altri profili

Per profili costituiti da rettangoli allungati convergenti in un solo punto la rigidità d'ingobbamento Γ risulta nulla.

Il centro di taglio si colloca nel punto di incontro dei rettangoli e ciò comporta un valore nullo per la distanza *r(s)* da C alla tangente alla linea media.

Se si considerano le variazioni di ingobbamento sullo spessore si ottengono dei valori della rigidità di ingobbamento che possono ritenersi trascurabili.





$$J = \frac{1}{3}\left(hb_a^3 + db_f^3\right) \qquad \Gamma = \frac{1}{144}b_f^3 d^3 + \frac{1}{36}b_a^3 h^3$$

$$J = \frac{1}{3}b^3\left(d_1 + d_2\right) \qquad \Gamma = \frac{1}{36}b^3\left(d_1^3 + d_2^3\right)$$