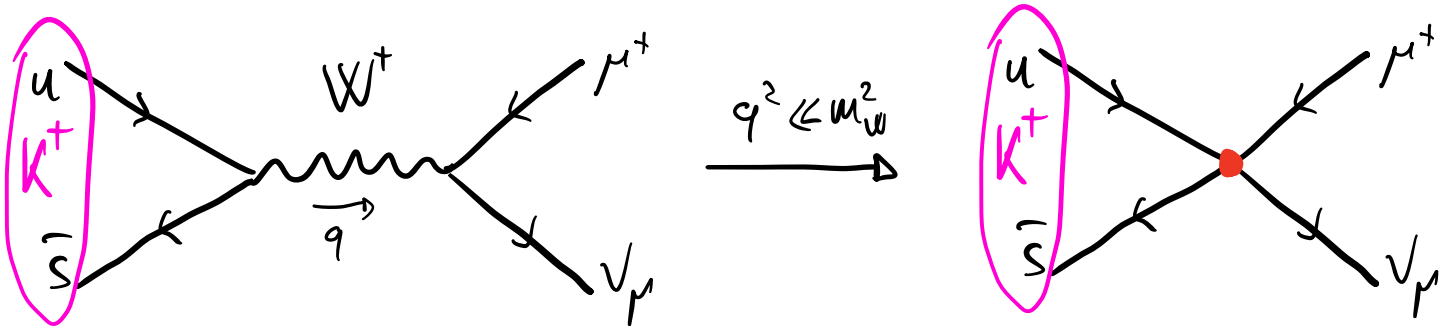


INTERAZIONI DEBOLI DEI K [Donoghue VIII-1]

Abbiamo visto che le transizioni di sapore nello SM sono dovute all'interazione con il bosone W:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}}^{\text{c.c.}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{\pm} \left(\bar{u}_L^{\pm} V_{\alpha\beta} \gamma^{\mu} d_L^{\beta} + \bar{\nu}_L^{\alpha} \gamma^{\mu} e_L^{\alpha} \right) + \text{h.c.}$$

Vediamo per esempio il **decadimento leptonic** $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_{\mu}$



$$iA = \left(-i\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 V_{us}^* \langle 0 | \bar{s} \gamma_{\mu} \frac{(1-\gamma_5)}{2} u | K^+(q) \rangle \frac{-i\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{m_W^2}\right)}{q^2 - m_W^2 + i\Gamma_W m_W} \left[\bar{\nu}_{\mu} \gamma_{\nu} \frac{(1-\gamma_5)}{2} \nu_{\mu} \right]$$

Dato che $q^2 = m_{K^+}^2 = (0,494 \text{ GeV})^2 \ll m_W^2 = (80,4 \text{ GeV})^2$

$$\frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2} \approx -\frac{g^{\mu\nu}}{m_W^2} + \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{m_W^4}\right) \quad m_W = \frac{gV}{2}, \quad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2V^2}$$

$$\Rightarrow iA \approx -i \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* \langle 0 | \bar{s} \gamma_{\mu} \frac{(1-\gamma_5)}{2} u | K^+(q) \rangle \left[\bar{\nu}_{\mu} \gamma^{\mu} \frac{(1-\gamma_5)}{2} \nu_{\mu} \right]$$

Coefficiente di Wilson elemento di matrice adronico

TEORIA EFFETTIVA DI BASSA ENERGIA

Essendo interessato ad energie $\ll m_w$ posso
INTEGRARE VIA dalla teoria gli stati pesanti (ϕ_H)
 W^\pm, Z, h, t .

Da questa procedura ottengo una
TEORIA DI CAMPO EFFETTIVA i cui gradi di libertà
sono solamente i campi leggeri (ϕ_L in generale) e
gli effetti dovuti ai campi pesanti sono descritti
da una serie di **OPERATORI EFFETTIVI** di dimensione
 $d > 4$, soppressi da potenze via via maggiori della
scala pesante: Λ_H scala di rinormalizzazione

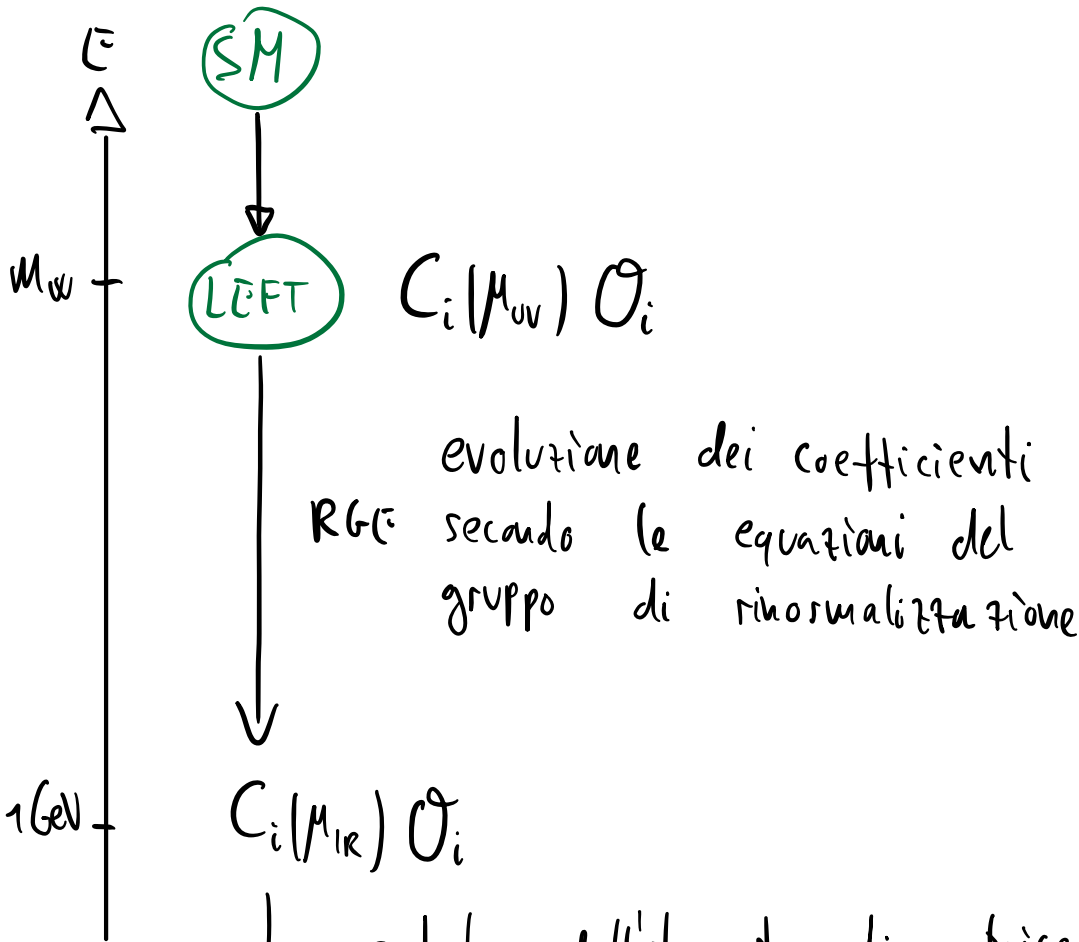
$$\mathcal{L}_{\text{EFF}}(\phi_L) = \mathcal{L}(\phi_L) + \sum_{d>4} \sum_i \frac{C_i^{(d)}(\mu)}{\Lambda_H^{d-4}} \mathcal{O}(\phi_L)^{(d)}$$

Il valore dei coefficienti $C_i^{(d)}(\mu)$ si trova con
una procedura di "MATCHING": eguagliando
ampiezze calcolate nella teoria effettiva con
quelle ottenute dalla teoria ultravioletta, valutate alla
stessa scala μ_w .

Neutrini sono solo LH
nello SM ↓

$$\mathcal{L}_{\text{LEFT}}^{(6)} \supset \frac{C_{\text{sd}^{\nu\nu}}^{\text{VL}}}{\Lambda^2} (\bar{S} \gamma_\alpha u) (\bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \mu) + \frac{C_{\text{sd}^{\nu\nu}}^{\text{AL}}}{\Lambda^2} (\bar{S} \gamma_\alpha \gamma_5 u) (\bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \mu) + \dots$$

↑
Low-energy EFT



↳ calcolo dell'elemento di matrice che ci interessa:

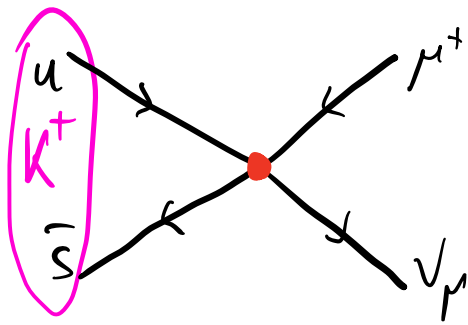
$$A \propto C_i(M_{\text{IR}}) \langle f | O_i | i \rangle$$

Describe l'origine UV dell'interazione

Si calcola in teoria delle perturbazioni

Elemento di matrice adronico nell'IR
È tipicamente non-perturbativo.

FATTORIZZAZIONE DELLA DINAMICA UV DA QUELLA IR.



$$= i \langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu \left(\frac{C_{sd\mu\nu}^{VL}}{\Lambda^2} + \frac{C_{sd\mu\nu}^{AL}}{\Lambda^2} \gamma_5 \right) u | K^+(q) \rangle [\bar{u}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu]$$

MATCHING
(Al livello albero)



$$\frac{C_{sd\mu\nu}^{VL}}{\Lambda^2} = - \frac{C_{sd\mu\nu}^{AL}}{\Lambda^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^*$$

Operatori a 4 fermioni a livello albero

[Shwartz .29.4]

$$\mathcal{L}_{W,Z}^{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\Sigma}_\mu^- + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{\Sigma}_\mu^+ + g Z_\mu \bar{\Sigma}_\mu^z$$

dove

$$\bar{\Sigma}_\mu^- = V_{ij} \bar{u}_L^i \gamma_\mu d_L^j + \bar{\nu}_L^i \gamma_\mu e_L^i \quad \bar{\Sigma}_\mu^+ = (\bar{\Sigma}_\mu^-)^\dagger$$

$$\bar{\Sigma}_\mu^z = \sum_\psi \left(\frac{1}{\cos\theta_w} \bar{\psi} \gamma_\mu T_L^3 \psi - \frac{\sin^2\theta_w}{\cos\theta_w} Q_\psi \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{somma su} \\ \text{tutti i fermioni} \\ \text{dello SM} \end{array}$$

\uparrow generatore di $SU(2)_L$ ($\frac{\sigma^3}{2}$ per ψ_L o ϕ per ψ_R)
 \uparrow carica elettrica

Integrando via W^\pm e Z a livello albero otteniamo i seguenti operatori a 4 fermioni:

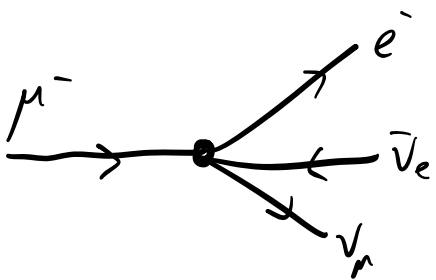
$$\mathcal{L}_{4f} = - \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\Sigma}_\mu^+ \bar{\Sigma}_\mu^- + \bar{\Sigma}_\mu^z \bar{\Sigma}_\mu^z \right]$$

Parentesi: estrazione di G_F

$$\mathcal{L}_{4F} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} (\bar{e} \gamma_\alpha P_L \nu_e) (\bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha P_L \mu), \quad P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$$

DECADIMENTO DEL MUONE $\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$

ANALISI DIMENSIONALI



$A \propto G_F$ L'ampiezza è lineare in G_F .

Rate di decadimento $\Gamma \propto |A|^2 \propto G_F^2$

Dato che in unità di energia $[\Gamma] = E$, $[G_F] = E^{-2}$, per completare Γ mi serve un parametro con dimensioni E^5 .

Nel limite $m_e \ll m_\mu$ posso trascurare $m_e = 0$.

Quindi l'unico altro parametro con dimensioni di energia

e' m_μ : $\Gamma \propto G_F^2 m_\mu^5 \times \frac{1}{64\pi^3} \rightarrow$ spazio delle fasi generico in 3 corpi

Facendo il calcolo esplicito: correzioni radiative

$$\Gamma(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2}{192\pi^3} m_\mu^5 \left(1 - \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right)^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_e}{4m_\mu}\right)\right)$$

\Rightarrow Dalla vita media e massa del muone posso estrarre G_F .

• Torniamo ai decadimenti leptonici dei K

Elemento di matrice di QCD

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u | K^+(q) \rangle$$

→ Non si calcola in th. delle perturbazioni perché QCD è non-perturbativa.

Possiamo però restringerne la forma.

• QCD è invariante sotto P (parità) e C (coniugazione di carica)

• I mesoni K (come i pioni) sono pseudoscalari

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u | K^+(q) \rangle = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ V_\mu & A_\mu \end{matrix}$$

$$\langle 0 | V_0 | K^+ \rangle : \langle \text{scalare} | \text{scalare} | \text{pseudoscalare} \rangle = 0$$

$$\langle 0 | A_0 | K^+ \rangle : \langle \text{scalare} | \text{pseudoscalare} | \text{pseudoscalare} \rangle \neq 0$$

$$\Rightarrow \langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 u | K^+(q) \rangle \neq 0$$

• Definiamo quindi, come per i pioni, la

COSTANTE DI DECADIMENTO f_K :

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 u | K^+(q) \rangle \equiv i f_K q_\mu$$

← Nota, in alcune referenze viene usata la convenzione $\sqrt{2} f_{\text{ref}}$.
Noi usiamo la convenzione del PDG

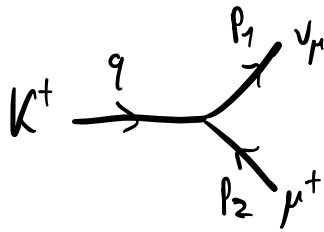
• f_K si ottiene o sperimentalmente o da QCD sul reticolo.

$$f_{K^\pm} = 155,7(3) \text{ MeV}$$

$$f_{\pi^\pm} = 130,2(1,2) \text{ MeV}$$

[PDG. 84]

Decadimento:



$$iA(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* i f_K q_\mu \left(\bar{u}_{\nu_\mu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu(p_2) \right)$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* f_K m_\mu \left(\bar{u}_{\nu_\mu}(p_1) (1 + \gamma_5) \nu_\mu(p_2) \right) \leftarrow$$

Eq. di Dirac:

$$\bar{u}_\nu(p_1) (\not{p}_1 + \not{p}_2) (1 - \gamma_5) \nu_\mu(p_2)$$

$$= -\bar{u}_\nu(p_1) (1 + \gamma_5) m_\mu \nu_\mu(p_2)$$

$$dM(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = \frac{1}{2m_{K^+}} \sum_{\text{spin}} |A|^2 d\tilde{\Pi}_{\text{LIPS}}$$

Lorentz-Invariant Phase Space: $d\tilde{\Pi}_{\text{LIPS}} = \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2} \right)$

$$\sum_{\text{spin}} |A|^2 = \frac{G_F^2}{2} |V_{us}|^2 f_K^2 m_\mu^2 \text{Tr} \left[\not{p}_1 (1 + \gamma_5) (\not{p}_2 - m_\mu) (1 - \gamma_5) \right]$$

$$\text{Tr} \left[\not{p}_1 (1 + \gamma_5) (\not{p}_2 - m_\mu) (1 - \gamma_5) \right] = 2 \text{Tr} \left[\not{p}_1 \not{p}_2 (1 - \gamma_5) \right] = 8 p_1 \cdot p_2 = 4(m_K^2 - m_\mu^2)$$

$$q = (p_1 + p_2)^2 = m_K^2 = m_\mu^2 + 2 p_1 \cdot p_2 \rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} (m_K^2 - m_\mu^2)$$

$$dM(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = \frac{1}{2m_{K^+}} \frac{G_F^2}{2} |V_{us}|^2 f_K^2 \cancel{4} m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2) \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2} \right)$$

Posso integrare $\int d\Omega = 4\pi$

$$\rightarrow \Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = \frac{G_F^2 f_{K^+}^2 m_K}{8\pi} m_\mu^2 |V_{us}|^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2}\right)^2$$

- Correzioni radiative (QED) sono $\sim \mathcal{O}(1\%)$

- Γ proporzionale a m_μ^2 :

$$\rightarrow \frac{\Gamma(K^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{1 - m_e^2/m_{K^+}^2}{1 - m_\mu^2/m_{K^+}^2} \right)^2 \approx 2.48 \times 10^{-5}$$

- Dipende da $|V_{us}|$ e da 1 solo parametro non perturbativo f_{K^+} .

\Rightarrow possiamo estrarre $|V_{us}|$.

- Questo e^- il decadimento principale, seguito da $\pi^+ \pi^0$.

$$\text{Br}(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) \approx 63,6\% \quad \text{Br}(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) \approx 20,67\%$$

$$\text{Br}(K^+ \rightarrow e^+ \nu_e) \approx 1,58 \times 10^{-5}$$

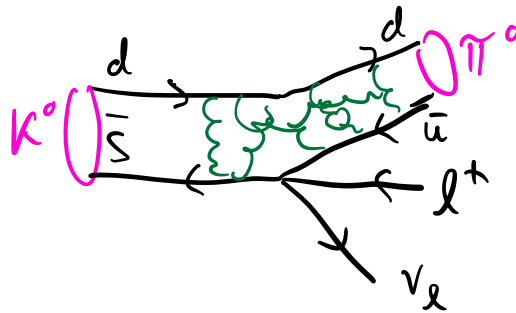
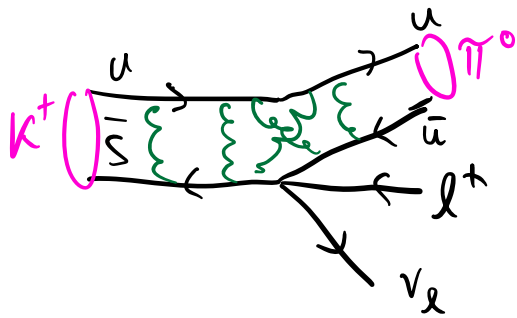
- Decadimenti in 3 corpi sono soppressi dallo spazio delle fasi.

- Risultato analogo per altri decadimenti leptonic:

$$\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l, \quad D^+ \rightarrow l^+ \nu_l, \quad B^+ \rightarrow l^+ \nu_l, \quad B_c^+ \rightarrow l^+ \nu_l, \quad \text{etc...}$$

Decadimento β dei K

Vediamo i decadimenti $K^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu_e$ e $K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_e$



L'elemento di matrice adronico fra i 2 mesoni è parametrizzato da 2 fattori di forma (ff):

$$\langle \pi^-(p) | \bar{s} \gamma_\mu u | K^0(k) \rangle = f_+(q^2) k_\mu + f_-(q^2) p_\mu$$

dove $q_\mu = k_\mu - p_\mu = p_\ell + p_\nu$

gli unici 2 vettori a disposizione sono k_μ e p_μ

funzioni di scalari di Lorentz.

Per convenzione si riarrangiano i termini

$$\langle \pi^-(p) | \bar{s} \gamma_\mu u | K^0(k) \rangle = f_+^{K^0 \pi^-}(q^2) (k+p)_\mu + f_-^{K^0 \pi^-}(q^2) (k-p)_\mu$$

$$\langle \pi^0(p) | \bar{s} \gamma_\mu u | K^+(k) \rangle = \frac{f_+^{K^+ \pi^0}(q^2)}{\sqrt{2}} (k+p)_\mu + \frac{f_-^{K^+ \pi^0}(q^2)}{\sqrt{2}} (k-p)_\mu$$

Questi ff sono oggetti non-perturbativi di QCD.

Nel limite $m_s \approx m_d \approx m_u = 0$ l'invarianza di ISOSPIN impone

$$f_\pm^{K^0 \pi^-} = f_\pm^{K^+ \pi^0} \equiv f_\pm$$

SFRUTTIAMO IL FATTO CHE ISOSPIN È UNA BUONA SIMMETRIA:

$$\begin{aligned} \langle \pi^0 | \partial_\mu (\bar{S} \gamma^\mu d) | K^+ \rangle &= g_\mu \left[f_+(q^2) (k+p)^\mu + f_-(q^2) q^\mu \right] = \\ &= f_+(q^2) (m_{K^+}^2 - m_{\pi^0}^2) + f_-(q^2) q^2 \end{aligned}$$

Per la corrente elettromagnetica avrei:

$$\langle \pi^+ | \partial_\mu \Sigma_{em}^\mu | \pi^+ \rangle = f_+^{\pi\pi}(q) (m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^+}^2) + f_-^{\pi\pi}(q^2) q^2 \equiv 0$$

$$\rightarrow \boxed{f_-^{\pi\pi}(q^2) = 0 \quad \text{se la corrente } \bar{e} \text{ conservata.}}$$

$$\langle \pi^+(p') | \Sigma_{em}^\mu | \pi^+(p) \rangle = \langle \pi^+ | \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma^\mu s + \dots | \pi^+ \rangle = f_+^{\pi\pi}(q^2) (p'+p)^\mu$$

per $p'=p$ $\langle \pi^+ | \Sigma_{em}^0 | \pi^+ \rangle = f_+^{\pi\pi}(0) 2\bar{C}_p$, $\bar{C}_p = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{p}^2}$

$$\langle \pi^+(p') | \hat{Q}_{em} | \pi^+(p) \rangle = \int d^3x \langle \pi^+ | \Sigma_{em}^0(\vec{x}) | \pi^+ \rangle =$$

$$= \int d^3x \langle \pi^+ | e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \Sigma_{em}^0(0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} | \pi^+ \rangle = \int d^3x e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} \langle \pi^+(p') | \Sigma_{em}^0(0) | \pi^+(p) \rangle$$

$$= (2\pi)^3 \delta^3(p-p') f_+^{\pi\pi}(q^2) (\bar{C}_p + \bar{C}_{p'}) = (2\pi)^3 \delta^3(p-p') f_+^{\pi\pi}(0) 2\bar{C}_p$$

$$\langle \pi^+(p') | \hat{Q}_{em} | \pi^+(p) \rangle = Q_{\pi^+} \langle \pi^+(p') | \pi^+(p) \rangle = Q_{\pi^+} (2\pi)^3 \delta^3(p-p') 2\bar{C}_p$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Se la corrente } \bar{e} \text{ conservata allora } f_+^{\pi\pi}(0) = Q = 1 \text{ } \bar{e} \text{ uguale alla carica elettrica.}}$$

- Se la carica NON è CONSERVATA $[\hat{Q}, \hat{H}] \neq 0$ allora posso scrivere una teoria delle perturbazioni scrivendo l'autostato di Hamiltoniana come combinazione di stati di cariche diverse:

$$|P\rangle = |P_0, Q_0\rangle + \sum_i c_i |P_i, Q_i\rangle$$

$$\Rightarrow \langle P | \hat{Q} | P \rangle = \langle P_0 | \hat{Q} | P_0 \rangle + \sum_i (c_i)^2 \langle P_i, Q_i | \hat{Q} | P_i, Q_i \rangle$$

⇒ Le correzioni sono QUADRATICHE nei termini di rottura della simmetria c_i

⇒ TEOREMA DI ADEROLLO-GATTO ('64)

Nel nostro caso in questione $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ \nu_l$, la simmetria $SU(3)_I$ mette anche in relazione questi ff con quelli per $\pi^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu_l$ e $\pi^+ \rightarrow \pi^+$

$$\Rightarrow f_+^{K\pi}(0) = 1 \left(1 + c \frac{(m_s - m_u)^2}{(4\pi f_\pi)^2} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{correzione molto} \\ \text{piccola} \end{array}$$

- La forma di $f_\pm(q^2)$ è misurata sperimentalmente.
- Lattice QCD (o chiral PT) è usata per fissare $f_\pm(0)$

↳ possiamo quindi estrarre $|N_{us}|$.

★ Analisi analoga per altri decadimenti semileptonici.

Per mesoni pesanti D , B , B_c , però la simmetria di isospin non è più una buona approssimazione.

Si usano invece altre tecniche per ottenere più informazioni sui fattori di forma $f_{\pm}(q^2)$. Per esempio una

espansione in $\frac{\Lambda_{QCD}}{m_q} \ll 1 \rightarrow$ "Heavy quark EFT."

$$\Lambda_{QCD} \lesssim 1 \text{ GeV},$$

$$m_c \simeq 1.2 \text{ GeV},$$

$$m_b \simeq 4.2 \text{ GeV}$$

HQET :

↓
al limite

↓
buona approssimazione