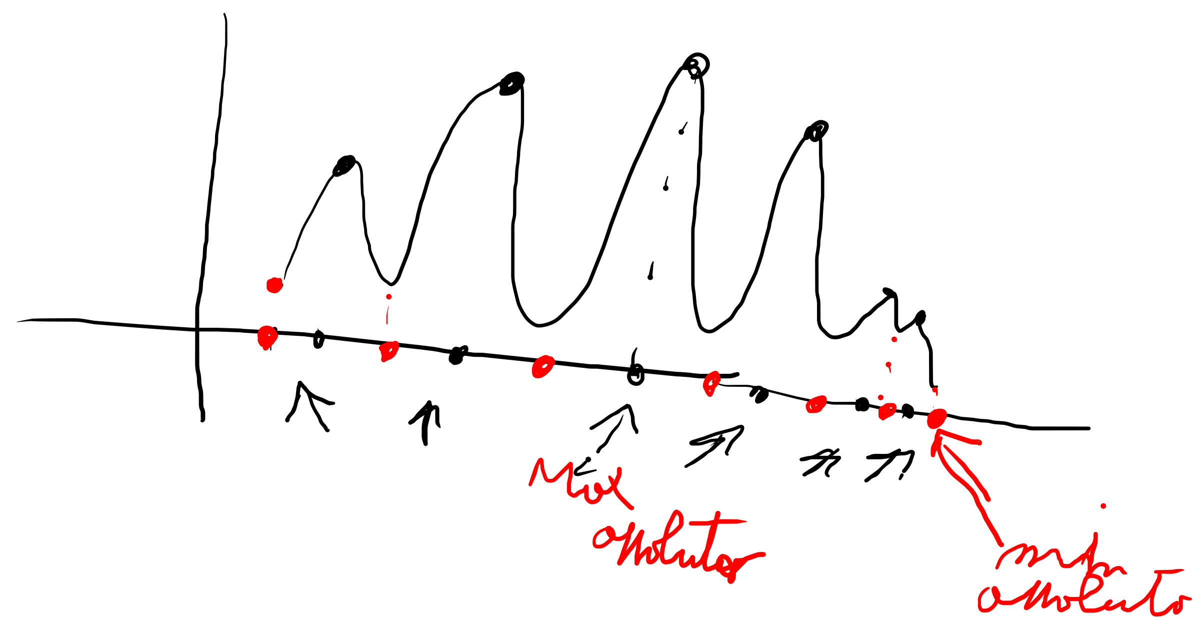
Def Data $f: X \to \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in X$ si dice un punto di massimo (minimo) relativo o locale se $\exists\ \varepsilon > 0$ t.c. $\forall\ x \in X$ con $|x - x_0| < \varepsilon$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$



Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Un punto x_0 in cui esiste $f'(x_0)$ e si abbia $f'(x_0) = 0$ è un punto "critico".

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x \qquad x \in [0,4]$

$f \in C^0([0,4])$

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$

Trovare punti di massimo e di minimo assoluto.

Il teorema di Fermat garantisce che se un punto interno a $[0,4]$ è di massimo o di minimo assoluto, allora è un punto critico.

$f'(x) = 0 \qquad 6(x^2-5x+6) = 0 \iff x^2-5x+6=0$

$\iff x = 2, 3$

Quindi i punti di massimo e di minimo assoluti sono tra i punti $x = 0, 2, 3, 4$

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$

$f(0) = 0 \qquad f(3) = 27, \quad f(4) = 32$

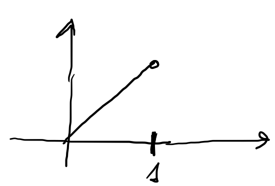
$f(2) = 28$

0 il punto di min assoluto

4 il punto di max assoluto.

Osservazione. Il teor di Fermat non riguarda gli estremi dell'intervallo, che possono essere punti di max/min senza essere punti critici

$f(x) = x \qquad [0,1]$

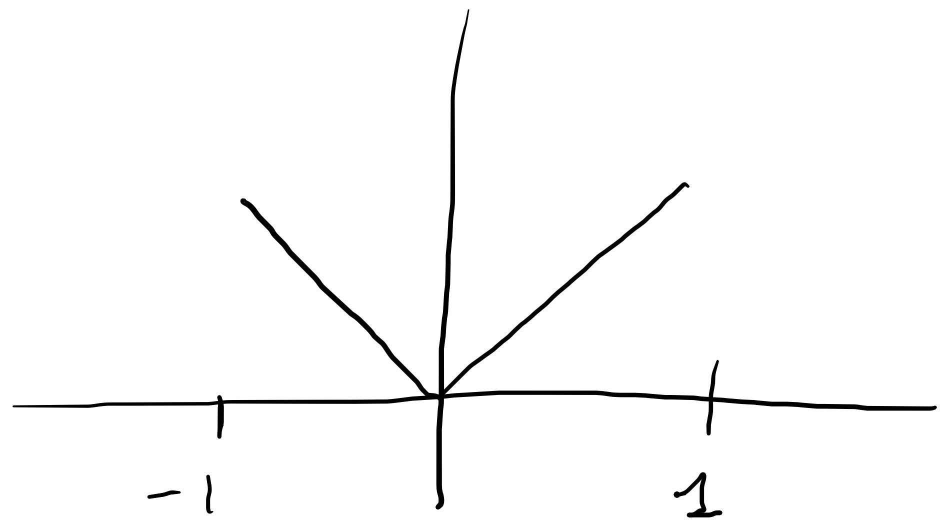


0 è il punto di min assoluto

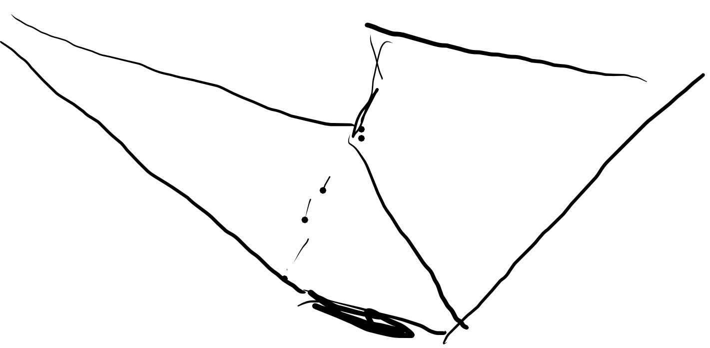
1 " max "

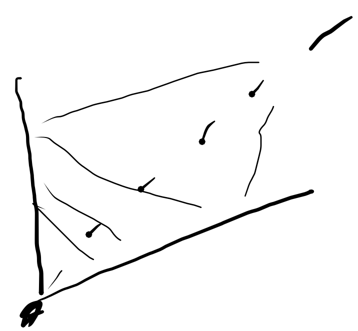
$f'(x) = 1$

$f(x) = |x|$ in $[-1, 1]$



0 è un punto di min assoluto ~~ma~~ non è un punto critico perché $f'(0)$ non esiste.





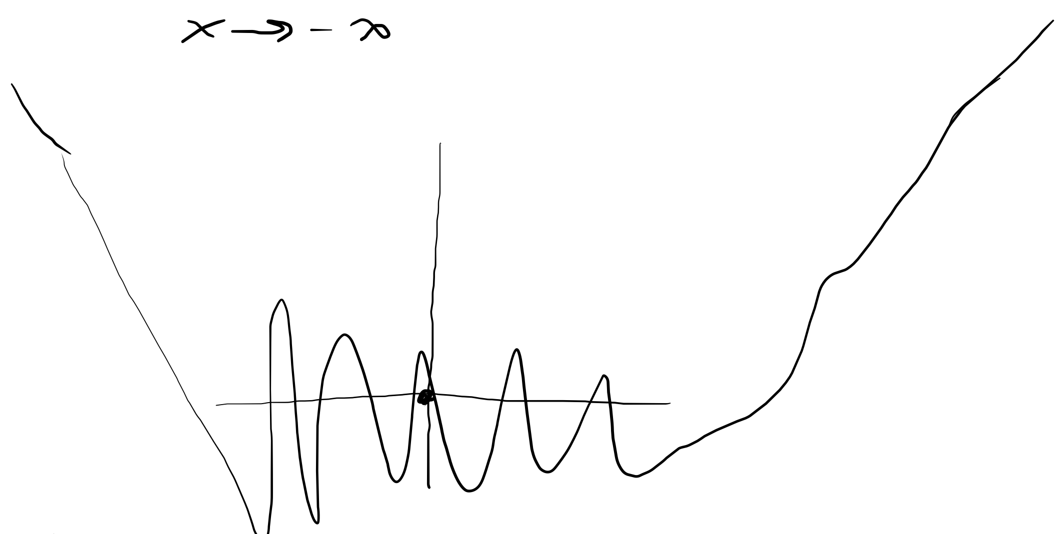
Esempio Verifichiamo che $1+x \le e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

e che si ha $1+x < e^x$ per $x \neq 0$.

Definisco $f(x) = e^x - x - 1$. Devo dimostrare che $f(x) > 0$ $\forall x \neq 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^x - x - 1\right) = 0 + \infty - 1 = +\infty$$

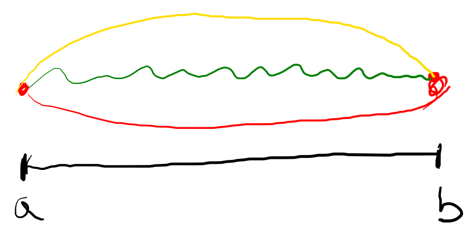


$$f'(x) = \left(e^x - x - 1\right)' = e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff \boxed{x = 0}$$

Essendo 0 l'unico punto critico, segue che 0 è l'unico punto di minimo assoluto. Cioè $f(x) > f(0) = 0 \quad \forall x \neq 0$

Teorema (di Rolle) Sia $f \in C^0([a,b])$ con $f(a)=f(b)$. Supponiamo che esista $f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c)=0$

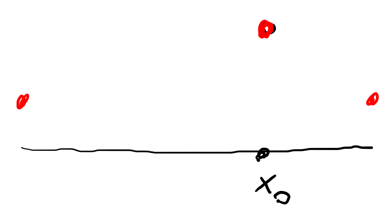
Dim



Se $f(x) \equiv C$ allora $f'(x)=0$ $\forall\, x \in (a,b)$

Supponiamo che $f(x)$ non sia costante. Allora esisterà un $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) \neq f(a)=f(b)$

Per fissare le idee, supponiamo $f(x_0) > f(a)=f(b)$



Siccome $f \in C^0([a,b])$ esiste un punto di massimo assoluto x_M

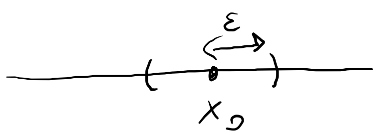
$f(x_M) \geq f(x_0) > f(a)=f(b) \Rightarrow x_M \in (a,b)$

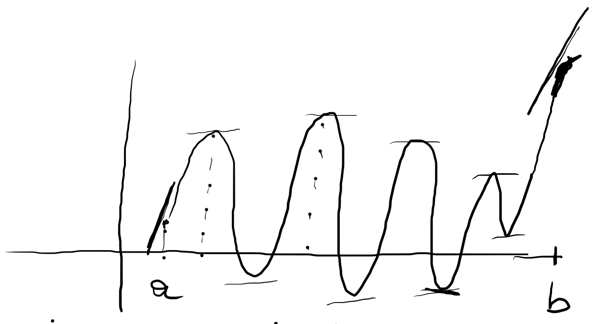
Siccome f' esiste in (a,b), per Fermat $f'(x_M)=0$

Scegliamo $c = x_M$.

Teor di Fermat Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervallo.
Sia x_0 un punto interno all'intervallo ~~ed $f \in C^0(I)$~~.
Supponiamo che esista $f'(x_0)$ e che x_0 sia un ~~estremo~~ estremo locale. Allora $f'(x_0) = 0$

Dim



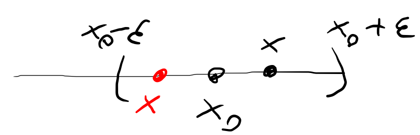


Per fissare le idee, supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale.
$f'(x_0)$ per ipotesi esiste

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Siccome x_0 è un punto di massimo locale so che $\exists\ \varepsilon > 0$
t.c. $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Per $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$



$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \leq 0 \implies f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\boxed{f'(x_0) \leq 0}$$

Per $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$,

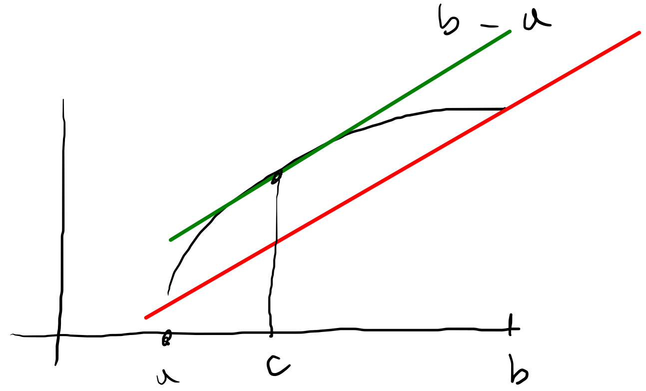
$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \geq 0 \implies f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\overset{\geq 0}{\boxed{f'(x_0) \geq 0}}$$

Concludo che $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Teor (di Lagrange) Sia $f \in C^0([a,b])$, f' esiste in (a,b).

$\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Dim Vorremmo applicare Rolle. Definiamo

$$F(x) = f(x) - \alpha(x-a) \qquad \alpha \text{ una costante}$$

Cerco α in modo che $F(a) = F(b)$ ✓

$F(a) = f(a)$

$F(b) = f(b) - \alpha(b-a) \overset{\text{voglio}}{=} f(a)$

$$f(b) - f(a) = \alpha(b-a) \qquad \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ soddisfa le ipotesi di Rolle. $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $F'(c) = 0$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$