Lezione 16

Teorema Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $U \neq \emptyset$. Allora U è unione topologica al più numerabile di aperti connessi per archi di $\mathbb{R}^n$.

Dim U loc. cpa $\Rightarrow$ le componenti cpa di U sono aperte in U quindi in $\mathbb{R}^n$ e coincidono con le componenti connesse $\rightsquigarrow U = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}(U)} P$

$\mathbb{R}^n$ II-numerabile (proprietà ereditaria).

$\forall\ P \in \mathcal{P}(U)$ scegliamo un punto $x_P \in P$ (assioma della scelta)

$\Rightarrow X = \{x_P \mid P \in \mathcal{P}(U)\} \subset \mathbb{R}^n$ discreto e II-numerabile

$\Rightarrow X$ al più numerabile $\Rightarrow \mathcal{P}(U)$ al più numerabile.

Corollario $U \subset \mathbb{R}$ aperto, $U \neq \emptyset \Rightarrow U$ unione topologica al più numerabile di intervalli aperti.

OSS $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, allora U connesso $\Leftrightarrow U$ connesso per archi.

Omotopia

Poniamo $I = [0,1]$

Def Siano X e Y due spazi topologici. Un'omotopia da X a Y è un'applicazione continua $H : X \times I \to Y$.

Poniamo $h_t : X \to Y$, $h_t(x) := H(x,t)$, $x \in X$, $t \in I$.

Def Due applicazioni continue $f, g : X \to Y$ sono omòtope se $\exists$ omotopia $H : X \times I \to Y$ t.c. $h_0 = f$, $h_1 = g$. Scriviamo

$$f \simeq g.$$

In più se $A \subset X$, f e g sono omòtope relativamente ad A se possiamo assumere $h_t|_A = f|_A\ \forall\ t \in I$ (omotopie relative). Scriviamo

$$f \simeq_A g \quad \text{oppure} \quad f \simeq g \ (\text{rel } A).$$

OSS $f \simeq_A g \iff \exists\ H : X \times I \to Y$ omotopia t.c.

$H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ $\forall x \in X$ e

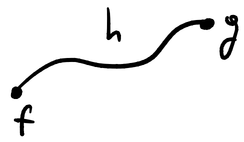
$H(a,t) = f(a)$ $\forall a \in A$, $\forall t \in I$.

In particolare è <u>necessario</u> che $f|_A = g|_A$.

OSS Posto $C(X,Y) := \{ f : X \to Y \mid f \text{ continua} \}$

un'omotopia può essere vista come un cammino

$$h : I \to C(X,Y)$$
$$t \mapsto h_t$$



Questo diventa rigoroso definendo un'opportuna topologia in $C(X,Y)$ (ma non la trattiamo).

Es $0 \simeq id_{\mathbb{R}^n}$, dove $0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è l'applicazione nulla

$H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $H(x,t) = tx$

$h_0 = 0$, $h_1 = id_{\mathbb{R}^n}$

Prop Siano X e Y spazi e $A \subset X$. Allora $\simeq$ e $\simeq_A$ sono relazioni d'equivalenza in $C(X,Y)$.

Dim Dimostriamolo per $\simeq$ (funziona anche per $\simeq_A$)

1) <u>Riflessiva</u>: $\forall f \in C(X,Y) \rightsquigarrow H : X \times I \to X$, $H(x,t) = f(x)$

$\Rightarrow f \simeq f$

2) <u>Simmetrica</u>: $f \simeq g \Rightarrow \exists\ H : X \times I \to Y$ continua t.c.

$h_0 = f$, $h_1 = g$ $\rightsquigarrow$ $\bar{H} : X \times I \to Y$

<u>omotopia inversa</u> $\bar{H}(x,t) := H(x, 1-t)$ continua

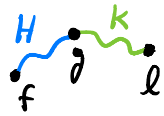
$\bar{h}_0 = h_1 = g$, $\bar{h}_1 = h_0 = f$ $\Rightarrow g \simeq f$.

3) <u>Transitiva</u>: $f \simeq g$ e $g \simeq l \Rightarrow \exists\, H, K : X \times I \to Y$ continue t.c. $h_0 = f$, $h_1 = g$, $k_0 = g$, $k_1 = l \rightsquigarrow H \cdot K : X \times I \to Y$

<u>omotopia prodotto</u> $$(H \cdot K)(x,t) := \begin{cases} H(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Per $t = \frac{1}{2}$ $H(x,1) = g(x) = K(x,0)$ $\forall x \in X \Rightarrow H \cdot K$ continua

$(H \cdot K)(x,0) = f(x)$, $(H \cdot K)(x,1) = l \Rightarrow f \simeq l$.



Def Le classi di equivalenza in $C(X,Y)$ rispetto a $\simeq$ si chiamano <u>classi d'omotopia</u>.

Si pone $[X,Y] := C(X,Y)/\simeq$ (<u>insieme delle classi d'omotopia</u>)

Def Un'applicazione continua $f : X \to Y$ è un'<u>equivalenza omotopica</u> se $\exists\, g : Y \to X$ continua t.c.

$$g \circ f \simeq id_X \quad \text{e} \quad f \circ g \simeq id_Y$$

Se questo accade, g è detta <u>inversa omotopica</u> di f.

Def Diciamo che due spazi X e Y sono omotopicamente equivalenti o che hanno lo stesso tipo d'omotopia se esiste un'equivalenza omotopica $f : X \to Y$. Scriviamo $X \simeq Y$.

NB Non confondere $\simeq$ tra spazi e $\simeq$ tra applicazioni.

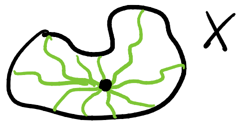
OSS 1) $f : X \to Y$ omeo $\Rightarrow f$ equivalenza omotopica con inversa omotopica $f^{-1} : Y \to X$. Infatti: $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$.

2) $X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$

Prop L'equivalenza omotopica è una relazione d'equivalenza tra spazi. $\boxed{E}$

Def Uno spazio X è <u>contraibile</u> se è omotopicamente equivalente ad un punto : $X \simeq \{*\}$.

NB Con $*$ indichiamo un <u>punto</u> non precisato oppure un'<u>applicazione costante</u> avente tale punto come valore.



Prop X è contraibile $\Longleftrightarrow$ $id_X \simeq$ costante.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $f : X \to \{*\}$ equivalenza omotopica

$g : \{*\} \to X$ inversa omotopica di f, $g(*) = x_0$

$x_0 = g \circ f : X \to X$ costante e $g \circ f \simeq id_X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $x_0 \in X$ t.c. $id_X \simeq x_0$ (applicazione costante $X \to X$, $x \mapsto x_0$)

$f : X \to \{x_0\}$, $i : \{x_0\} \to X$ $i(x_0) = x_0$

$f \circ i = id_{\{x_0\}}$, $i \circ f = x_0 \simeq id_X$ $\Rightarrow$ f equivalenza omotopica

$\Rightarrow X \simeq \{x_0\}$.

Corollario $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ U contraibile.

Dim $x_0 \in U \rightsquigarrow H : U \times I \to U$, $H(x,t) = tx + (1-t)x_0$

U convesso $\Rightarrow$ H ben definita

$h_0 = x_0$ costante, $h_1 = id_U$ $\Rightarrow$ $id_U \simeq$ costante.

OSS In particolare $\mathbb{R}^n$ e B^n sono contraibili $\forall n \geq 0$.

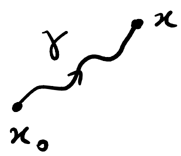
Prop Contraibile $\Rightarrow$ connesso per archi.

Dim X contraibile $\rightsquigarrow$ $H : X \times I \to X$ omotopia

$h_0 = x_0 =$ costante, $h_1 = id_X$

$\forall x \in X \rightsquigarrow \gamma : I \to X$, $\gamma(t) = H(x,t)$

$\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$.



Def Sia $A \subset X$ un sottospazio. Una <u>retrazione</u> di X su A è un'applicazione continua $r : X \to A$ t.c. $r(a) = a \ \forall a \in A$.

OSS $r : X \to A$ continua è retrazione $\iff r \circ i_A = id_A$ dove $i_A : A \to X$ inclusione.