Lezione 19

Teorema di Rouché - Capelli Sia $S: AX = B$ un sistema lineare con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Allora S è compatibile se e solo se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$. Quando questo accade si ha

$$\dim \Sigma_S = n - \operatorname{rg} A$$

dove $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è lo spazio delle soluzioni di S.

Dim $S: x_1 A_{(1)} + \dots + x_n A_{(n)} = B$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) \iff B \in \operatorname{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$$
$$\iff \exists \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } B = \lambda_1 A_{(1)} + \dots + \lambda_n A_{(n)}$$
$\iff S$ è compatibile. Questo dimostra la 1ª parte.

Supponiamo ora S compatibile $\Rightarrow \Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio affine $\Rightarrow \dim \Sigma_S = \dim \Sigma_{S_0}$, con $S_0 : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$ sistema omogeneo associato. Sappiamo che $\dim \Sigma_{S_0} = n - \operatorname{rg} A \Rightarrow$

$$\dim \Sigma_S = n - \operatorname{rg} A.$$

Lemma $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,l}(\mathbb{K}) \Rightarrow \operatorname{rg}(AC) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} C)$.

Dim $S: CX = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \dim \Sigma_S = l - \operatorname{rg} C$

$T: ACX = 0_{\mathbb{K}^m} \Rightarrow \dim \Sigma_T = l - \operatorname{rg}(AC)$

$\forall U \in \Sigma_S \Rightarrow CU = 0 \Rightarrow ACU = A0 = 0 \Rightarrow U \in \Sigma_T$

$\Rightarrow \Sigma_S \subset \Sigma_T \Rightarrow \dim \Sigma_S \leq \dim \Sigma_T \Rightarrow l - \operatorname{rg} C \leq l - \operatorname{rg}(AC)$

$\Rightarrow \operatorname{rg}(AC) \leq \operatorname{rg} C$

$\operatorname{rg}(AC) = \operatorname{rg}{}^t(AC) = \operatorname{rg}({}^tC\,{}^tA) \leq \operatorname{rg}{}^tA = \operatorname{rg} A$.

Quindi $\operatorname{rg}(AC) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} C)$.

Matrice inversa

Def Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata di ordine n.

Diciamo che A è invertibile se $\exists\, A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n$$

dove $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ è la matrice identica.

A^{-1} se esiste è detta matrice inversa di A.

Teorema $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile $\iff$ $\operatorname{rg} A = n$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ A invertibile $\Rightarrow$ $A A^{-1} = I_n$ $\Rightarrow$ $n = \operatorname{rg} I_n = \operatorname{rg}(A A^{-1}) \leq \operatorname{rg} A$

$\Rightarrow$ $\operatorname{rg} A = n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $I_n = (e_1 \dots e_n)$ base canonica di $\mathbb{K}^n$.

$AX = e_j$ è compatibile perché $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid e_j) = n$

$\Rightarrow \exists!$ soluzione $X = P_j \in \mathbb{K}^n \rightsquigarrow P = (P_1 \dots P_n)$

$\dim \Sigma = n - n = 0$

$\forall j$ si ha: $(A\,P)_{(j)} = A P_j = e_j \Rightarrow AP = I_n$

$\Rightarrow n = \operatorname{rg} I_n \leq \operatorname{rg} P \Rightarrow \operatorname{rg} P = n \Rightarrow \exists\, Q \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ t.c.

Per quanto già dimostrato

$PQ = I_n \Rightarrow APQ = A I_n \Rightarrow I_n Q = A \Rightarrow Q = A$

Pertanto $AP = PA = I_n \Rightarrow P = A^{-1}$.

OSS 1) $I_n^{-1} = I_n$

2) $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ invertibili $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ infatti

$$A B B^{-1} A^{-1} = A I_n A^{-1} = A A^{-1} = I_n$$

3) $(A^{-1})^{-1} = A$

Def Il <u>gruppo lineare generale</u> di ordine n su $\mathbb{K}$ è definito come

$$GL_n(\mathbb{K}) := \{ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ invertibile} \}$$

OSS
1) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \operatorname{rg} A = n$ (<u>rango massimo</u>)
2) $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
3) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$
4) $A, B \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in GL_n(\mathbb{K})$
5) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$ base per $\mathbb{K}^n$
5') $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ base per $\mathbb{K}^n$.
6) $0 \notin GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ non è spazio vettoriale.

Calcolo della matrice inversa

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow (A \mid I_n) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} (I_n \mid A^{-1})$$

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$