Lezione 20

Cambio di base

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ due basi per V

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coordinate rispetto a $\mathcal{B}$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coordinate rispetto a $\mathcal{C}$

} dello stesso vettore $v \in V$

$$v = X^{\mathcal{B}} = Y^{\mathcal{C}}$$

Problema che relazione c'è tra X e Y?

Scriviamo b_j come combinazione lineare rispetto a $\mathcal{C}$:

$$b_j = p_{1j} c_1 + \dots + p_{nj} c_n = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} c_i$$

per certi $p_{ij} \in \mathbb{K}$ $\rightsquigarrow$ $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \implies b_j = P_{(j)}^{\mathcal{C}}$

$c_1, \dots, c_n$ lin. indip. $\implies P_{(1)}, \dots, P_{(n)} \in \mathbb{K}^n$ lin. indip. $\implies$

$\operatorname{rg} P = n \implies P \in GL_n(\mathbb{K})$.

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \right) c_i = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$$

$$\implies y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n \implies \boxed{Y = PX}$$

Def P è detta <u>matrice del cambiamento di base</u>, <u>dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$</u>. E' costruita <u>per colonne</u>: la colonna j-esima di P sono le coordinate di b_j rispetto a $\mathcal{C}$. Si indica con

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) := P \quad \text{o anche solo} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

(id_V sarà chiaro più avanti)

$P \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \exists\, P^{-1} \Rightarrow P^{-1}Y = \underbrace{P^{-1}P}_{I_n} X \Rightarrow X = P^{-1}Y$

Quindi P^{-1} è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Si ha quindi $\boxed{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) = \left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)\right)^{-1}}$

Viceversa se $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ è base di V e $P = (p_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$

$\rightsquigarrow b_j := P^{\mathcal{C}}_{(j)} = p_{1j}c_1 + \dots + p_{nj}c_j \Rightarrow b_1, \dots, b_n$ lin. indip.

$\Rightarrow \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V e $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = P$.

<u>OSS</u> Scelta una base $\mathcal{B}$ per V, $\dim V = n$, le matrici invertibili di $GL_n(\mathbb{K})$ possono essere interpretate come matrici del cambiamento di base:

$$\underset{\text{base per } V}{\mathcal{C}} \rightsquigarrow M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V) \in GL_n(\mathbb{K})$$

<u>OSS</u> $\boxed{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V) = I_n}$

Siano $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$, $Q = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(id_V) \in GL_n(\mathbb{K})$

base	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
coordinate	X	Y	Z

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

$Y = PX$, $Z = QY \Rightarrow Z = QPX$

Quindi $\boxed{M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id_V) = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(id_V) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)}$

Esempi

1) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathcal{U} = (u_1, u_2)$ base per $\mathbb{R}^2$

espressi nella base canonica $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$

$$M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{E}_2} = \left(M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{U}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}^{\mathcal{E}_2} \rightsquigarrow M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{E}_2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}^{\mathcal{U}}.$$

2) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathcal{V} = (v_1, v_2)$ base per $\mathbb{R}^2$

$$M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{E}_2} \cdot M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \qquad M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} = \left(M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Equazioni parametriche e cartesiane

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per $V \rightsquigarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coord.

$W \subset V$ sottospazio vettoriale di V, $\dim W = l \leq n$.

$l = n \Rightarrow W = V$. Supponiamo $l \leq n-1$

Def Se $\dim L = \dim V - 1$ diciamo che W è un <u>iperpiano vettoriale</u> di V.

$\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_l)$ base di W $\rightsquigarrow$ $\tilde{\mathcal{W}} = (w_1, \dots, w_n)$ base di V

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coordinate rispetto a $\mathcal{W}$ $\rightsquigarrow$ $A = (a_{ij}) = M^{\tilde{\mathcal{W}}}_{\mathcal{B}}(id_V)$

$w = Y^{\tilde{\mathcal{W}}} \in W \iff \begin{cases} y_{l+1} = 0 \\ \vdots \\ y_n = 0 \end{cases}$ equazioni cartesiane di W nella base $\tilde{\mathcal{W}}$

$Y = AX \Rightarrow y_i = A^{(i)} X = a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n, \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$W : \begin{cases} a_{l+1\,1} x_1 + \dots + a_{l+1\,n} x_n = 0 \\ \quad \dots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = 0 \end{cases}$$

equazioni cartesiane di W nella base $\mathcal{B}$.

Def Un tale sistema lineare omogeneo prende il nome di sistema di <u>equazioni cartesiane</u> per W (o solo equazione cartesiana).

NB Le equazioni cartesiane sono linearmente indipendenti per definizione. In altre parole se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $AX = 0$ è equazione cartesiana se $\operatorname{rg} A = m \leq n$.

Abbiamo quindi dimostrato il teorema seguente.

Teorema Sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V, e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale con $\dim W = l$. Allora W è definito da $n-l$ equazioni cartesiane nelle coordinate $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Viceversa, un sistema di k equazioni cartesiane (indipendenti) definisce un sottospazio vettoriale $W \subset V$ con $\dim W = n-k$.

OSS Se $W \subset V$ è un iperpiano vettoriale, ovvero

$$\dim W = \dim V - 1$$

allora, una volta fissata una base per V, è possibile definire W mediante una sola equazione cartesiana.

In $\mathbb{R}^n$ (o più in generale in $\mathbb{K}^n$) abbiamo la base canonica.

Es 1) $W \subset \mathbb{R}^2$, $W: x + 2y = 0$ retta vettoriale.

2) $U \subset \mathbb{R}^3$, $U: \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ equazioni cartesiane di U

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

$U: \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$ equazioni parametriche di U

$U: X = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ equazione parametrica vettoriale di U

$$\boxed{\text{Equazioni cartesiane}} \underset{\text{eliminazione dei parametri}}{\overset{\text{Gauss}}{\rightleftarrows}} \boxed{\text{Equazioni parametriche}}$$