RG flow

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu}$$ ← $g_r(\mu)$

1-loop ↓ higher loops ↓

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \dots$$

Valida in regime perturbativo ($g(\mu) \ll 1$)

(ordini superiori in g)

$\beta_0 = -\frac{11}{3} \frac{C_2(G)}{(4\pi)^2}$ in YM

Integriamo

$$\int_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} = \ln(\mu/\mu_0)$$

in regime perturbativo

$$\frac{1}{\beta_0} \int_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \frac{dg}{g^3} = \frac{1}{\beta_0} \left(-\frac{1}{2g^2} \right|_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} = \frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)} - \frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + \beta_0 \ln\left(\mu_0^2/\mu^2\right)$$

$$\hookrightarrow \quad g^2(\mu) = \frac{g^2(\mu_0)}{1 + \beta_0 g^2(\mu_0) \ln\left(\mu_0^2/\mu^2\right)}$$

YM:

$\beta_0 = -\frac{11}{3} \frac{C_2(G)}{(4\pi)^2} < 0 \Rightarrow$ all'aumentare della scala μ, $g(\mu)$ diminuisce → ASYMPTOTIC FREEDOM in UV

⇒ diminuendo la scala μ, $g(\mu)$ aumenta e ad un certo punto diventa >1 → Regime di ACCOPPIAM. FORTE (strong coupling) a basse energie

Dimensional transmutation

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + \beta_0 \ln\left(\mu_0^2/\mu^2\right) \Rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} = e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)}} \cdot e^{-\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}}$$

$$\Rightarrow \mu\, e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}} = \mu_0\, e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)}}$$ ← dimensioni di una scala di ENERGIA

$$\Rightarrow \Lambda(\mu) \equiv \mu\, e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}}$$ è INDIPENDENTE dalla scala μ ed è chiamata Λ_{QCD}

- Λ_{QCD} è una SCALA della TEORIA "generata" dalla QFT.
- Λ_{QCD} è detta SCALA DI QCD o "RG-invariant scale"
- Λ_{QCD} è la scala $\bar{\mu}$ a cui $g(\bar{\mu}) \to \infty$
  (Perchè in questo caso $\mu = \Lambda_{QCD}$)
- Λ_{QCD} è la scala sotto la quale la teoria diventa fortemente accoppiata

↪ La teoria di YM classica non ha parametri di dimensione massa $\neq 0$.
D'altra parte la QFT ha generato una scala fisica Λ_{QCD}
⇝ "DIMENSIONAL TRANSMUTATION"

Domanda: come appare la teoria di YM a scale $\ll \Lambda_{QCD}$?

Risposta parziale ottenuta da analisi di esperimenti e calcoli numerici sul reticolo:

- YM non descrive particelle MASSLESS.
- invece, i gluoni sono in stati composti detti GLUEBALLS che sono particelle MASSIVE $m \sim \Lambda_{QCD}$

→ si dice che la Teoria ha un MASS GAP

(c'è un gap tra lo stato di vuoto e il 1° livello eccitato)

Esempio: $\mathbb{Z}^2$

Risultati quantitativi ottenuti "mettendo la teoria sul RETICOLO (Lattice)",

cioè $\mathbb{R}^4 \to$ RETICOLO $\mathbb{Z}^4$

$\Rightarrow$ c'è distanza minima L $\Rightarrow$ en. max $\frac{1}{L} \sim$ cutoff della teoria.

→ conti numerici danno risultati quantitativi (approssimati).

→ Esempio: "YM ha un MASS GAP $m \sim \Lambda_{QCD}$".

[Il MASS GAP non è dimostrato analiticam. in YM]

Beta function:

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \dots$$

materia fermionica

materia scalare

dove $\beta_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2}\left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(R_f) - \frac{1}{3} N_s C(R_s)\right]$

contributo di MASSLESS fields

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(R_f) - \frac{1}{3} N_s C(R_s)\right] \ln\frac{\mu_0^2}{\mu^2}$$

RG flow è lungo scale di en.

UV

$\downarrow$ m

IR

Se un campo ha una massa m, esso viene visto come campo MASSLESS a scale $E \gg m$; invece a scale $E \ll m$ il campo non propaga e può essere "integrato via" (integrated out) e non partecipa al running di $g(\mu)$.

IR PHASES of QCD-like theories

Consideriamo teorie con $N_S = 0$, con gruppo di gauge $SU(N_c)$ (N_c viene detto n° di colori) e N_f fermioni in rep fondamentale ($R_f = N_c$)

$\Rightarrow \quad C_2(G) = N_c \qquad C(R_f) = 1/2$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - \frac{1}{(4\pi)^2}\underbrace{\left[\frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f\right]}\ln\frac{\mu_0^2}{\mu^2}$$

Avremo una diversa dinamica a seconda del valore di $\frac{N_f}{N_c}$

IR FREE PHASE $\quad N_f > \frac{11}{2}N_c \quad \longrightarrow \quad \beta_0 > 0$

$\Rightarrow g(\mu)$ è sempre più DEBOLE andando nell'IR: possiamo fidarci dei conti semiclassici ma otteniamo bosoni di gauge e fermioni debolmente accoppiati

Quando $N_f = \frac{11}{2}N_c \quad \longrightarrow$ la funzione β è nulla a 1-loop

$\Rightarrow$ per sapere se β è >0, <0 o $=0$ dobbiamo calcolare il contributo a 2-loop (β_1)

(la teoria è ancora IR-free per $N_f = \frac{11}{2}N_c$)

CONFORMAL WINDOW $\quad N_f$ appena sotto $\frac{11}{2}N_c$

$$\beta(g) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1-loop}}}{\beta_0 g^3} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2-loop}}}{\beta_1 g^5} + \dots = g^3(\beta_0 + \beta_1 g^2)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(-\frac{11}{3}N_c + \frac{2}{3}N_f\right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2}\left(-\frac{34}{3}N_c^2 + \frac{N_f(N_c^2-1)}{N_c} + \frac{10}{3}N_f N_c\right)$$

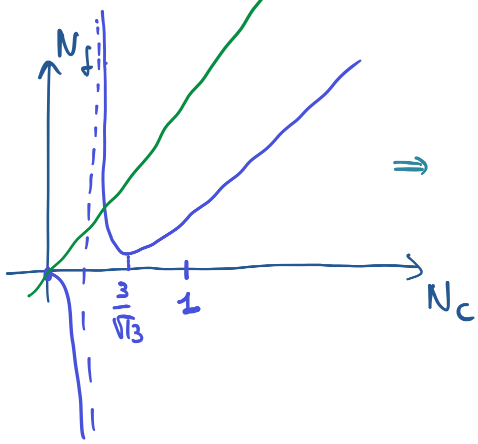
$\beta_1 = \frac{22}{2}N_c^2 - \frac{11}{2}$ per $N_f = \frac{11}{2}N_c$

$\beta_1 > 0 \quad (\beta_0 = 0)$

$\beta_1 > 0$ quando $N_f > \frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3}$ • ha min a $N_c^2 = 9/13$

$\wedge$

$\beta_0 < 0$ " $N_f < \frac{11}{2} N_c$ •



$\Rightarrow N_f \geq 1 \qquad \frac{11}{2} N_c > \frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3}$

Quando $\frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3} < N_f < \frac{11}{2} N_c \Rightarrow \beta(g)$ ha uno ZERO

per $g_*^2 = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$

β_0, β_1 dipendono da N_c, N_f → il valore di g_* dipende pure da N_c, N_f

Mettiamoci in $\frac{N_f}{N_c} = \frac{11}{2} - \epsilon$ (ϵ piccolo)

$$g_*^2 = \frac{\frac{1}{\cancel{(4\pi)^2}} \left(\frac{11}{\cancel{3}} N_c - \frac{2}{\cancel{3}} N_f \right) \cdot \frac{1}{2N_c}}{\frac{1}{(4\pi)^{\cancel{4}\,2}} \left(-\frac{34}{\cancel{3}} N_c^2 + 3 \frac{N_f (N_c^2 - 1)}{\cancel{3} N_c} + \frac{10}{\cancel{3}} N_f N_c \right) \cdot \frac{1}{2N_c}}$$

$$= \frac{16\pi^2 \left(\frac{N_f}{N_c} - \frac{11}{2} \right)}{N_c \left(-17 + \frac{3}{2} \frac{N_f}{N_c} \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \right) + 5 \frac{N_f}{N_c} \right)}$$

$\frac{N_f}{N_c} = \frac{11}{2} - \epsilon$ ↘

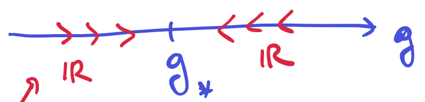
$$g_*^2 = \frac{-16 \pi^2 \epsilon}{N_c \left(-17 + \frac{13}{2} \cdot \frac{11}{2} - \frac{33}{4 N_c^2} + O(\epsilon) \right)} = \frac{64 \pi^2 N_c}{75 N_c^2 - 33} \epsilon + O(\epsilon^2)$$

Per $\epsilon \ll 1$ $\rightarrow$ $\boxed{g_*^2 \ll 1}$ $\rightsquigarrow$ teoria è debolm. accoppiata

In particolare, l'analisi PERTURBATIVA che abbiamo fatto è VALIDA.

Cioè la teoria a basse energie è descritta da una teoria debolmente accoppiata che come pto fisso del RG è INV. sotto trasf. di scala (e "quindi" CONFORME) "Banks-Zaks fixed pt"

$\beta<0$ $\beta>0$



a μ inferiori corrispondono g maggiori

PUNTO FISSO INFRAROSSO

$$\beta = (\beta_0 + \beta_1 g^2) g^2 = g^2 \beta_1 \left(g^2 + \frac{\beta_0}{\beta_1} \right) = g^2 \beta_1 (g^2 - g_*^2)$$

$\beta_1 > 0$

$\downarrow$

è una teoria CONFORME

(simmetria CONFORME vincola molto la teoria, permettendo di trovare risultati altrimenti molto difficili)

(In IR free phase, il pto fisso IR è $g=0$, cioè la teoria conforme corrisp. è TRIVIALE)

Calando $\frac{N_f}{N_c}$: il risultato precedente ci dice che c'è un pto fisso IR non-triviale, almeno finché vale la teoria delle perturbazioni, cioè fino $N_f \sim \frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3}$ quando $g_* \sim 1$.

Per N_f superiori la teoria è fortemente accoppiata attorno a g_* e non possiamo più fidarci dei conti a 2-loop.

In generale uno si aspetta che ci sia un pto fisso IR non-b. per

$$N_* < N_f < \frac{11}{2} N_c \qquad \text{"FINESTRA CONFORME"}$$

per un certo valore critico N_*. Qual è il suo valore?

Conti numerici sul reticolo: c'è un'evidenza che per $N_c = 3$ si ha $N_* \in [8, 12]$; inoltre ci si aspetta l'andamento $N_* \approx (3-4) N_c$

Per $N_f \leq N_*$ $\quad \beta < 0 \rightarrow$ nell'IR la cost. di accopp. è suff. forte per portare al CONFINAMENTO (tutti i quanti a energia finita sono singoletti di gauge)

$\downarrow$

la maggior parte degli stati sono MASSIVI con $m \sim \Lambda_{QCD}$

Però rimangono dei MODI MASSLESS: infatti

$$\langle \bar{\psi}_i^L \psi_j^R \rangle \sim \delta_{ij} \qquad i,j = 1, \dots, N_f$$

conti su reticolo dicono $\neq 0$

Questo VeV (vacuum expect. value) rompe spontaneam. una simmetria globale della teoria detta

CHIRAL SYMMETRY

$\longrightarrow$ BOSONI DI GOLDSTON ($\pi^0, \pi^\pm$ se sym è SU(2) ottetto se sym è SU(3))

QCD : $N_c = 3$ $N_f = 6$

$\Lambda_{QCD} \sim 300$ MeV

	m (MeV)
d	4
u	2
s	95
c	1250
b	4200
t	170'000

$m_u, m_d \ll \Lambda_{QCD}$

$m_s < \Lambda_{QCD}$

$m_c, m_b, m_t \gg \Lambda_{QCD}$ $\rightarrow$ c, b, t "disaccoppiano" prima di raggiunger Λ_{QCD} nel RG flow verso IR

$\rightarrow$ per l'andare IR

$N_f = 3$

Sim. globale

$i, j = 1, \dots, 3 = N_f$

$\psi^\dagger_{L_i} \not{\partial} \psi_{L_i} + \psi^\dagger_{R_j} \not{\partial} \psi_{R_j}$

$m(\psi^\dagger_L \psi_R + \psi^\dagger_R \psi_L)$

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \xrightarrow[\langle \bar{\psi}_i \psi_j \rangle \neq 0]{} SU(3)_V$$

Particelle che osserviamo (ADRONI) sono singoletti di gauge

quarks $\rightarrow$ qqq $\quad q\bar{q}$ MESONI

$q\bar{q} \rightarrow 3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$

8: $\pi^\pm \pi^0$, $k^\pm k^0$

1: η'

$u\bar{u}$ $d\bar{d}$ $s\bar{s}$ $\rightarrow \eta$

qqq: rep. di FLAVOUR SYM $\rightarrow$ $3 \otimes 3 \otimes 3$

BARIONI