Corso di ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

Foglio di esercizi n. 5

1. Si determini una parametrizzazione razionale $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathcal{F}_2$ della conica di Fermat $\mathcal{F}_2 = V(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{F}_2 \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ (dove $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ è identificato con l'insieme dei punti $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tali che $a, b, c \in \mathbb{Q}$).

2. Si determini una parametrizzazione razionale della cuspide $\mathcal{C} = V(x^3 - y^2) \subset \mathbb{C}^2$ e si dimostri che la parametrizzazione indotta $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è un omeomorfismo.

3. Si dica se il trifoglio $V\left((x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3\right)$ è una curva razionale. In caso affermativo se ne determini una sua parametrizzazione razionale.

4. Siano $\varphi, \psi \in \mathbb{C}[t]$ non entrambi costanti. Sia

$$X = \left\{(\varphi(t), \psi(t)) \subset \mathbb{C}^2 \,|\, t \in \mathbb{C}\right\} .$$

Si dimostri che X è una curva algebrica affine piana razionale.