# Lezione 21 Determinante

Vogliamo definire una funzione chiamata determinante

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ utile a capire quando $rg\, A$ è massimo.

Per $n = 1$, $M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ e poniamo $\det(a) = a$ $\forall\, a \in \mathbb{K}$, cioè

$$\det = id_{\mathbb{K}} \quad \text{per } n = 1.$$

Per $n = 2$ partiamo da un esempio.

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e vogliamo capire quando $rg\, A = 2$.

Supponiamo $a_{11} \neq 0$ per semplicità.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

Quindi $rg\, A = 2 \iff a_{11}\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

Lo stesso risultato si ottiene se $a_{11} = 0$

Questo ci porta a considerare la funzione

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e si ha $rg\, A = 2 \iff \det A \neq 0$ $\forall\, A \in M_2(\mathbb{K})$.

Esaminiamo alcune proprietà di $\det A$ nel caso $2 \times 2$

1) $A^{(1)} = A^{(2)} \Rightarrow \det A = 0$

1') $A_{(1)} = A_{(2)} \Rightarrow \det A = 0$

$\Big\}$ perché $rg\, A < 2$

2) $\det\begin{pmatrix} A_{(2)} & A_{(1)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\det A$

3) $\det\begin{pmatrix} A_{(1)} + B & A_{(2)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} & A_{(2)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} B & A_{(2)} \end{pmatrix}$ con $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

3') $\det\begin{pmatrix} A_{(1)} & A_{(2)} + B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} & A_{(2)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_{(1)} & B \end{pmatrix}$.

Infatti la (3) si verifica direttamente

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} \\ a_{21}+b_2 & a_{22}\end{pmatrix} = (a_{11}+b_1)a_{22} - a_{12}(a_{21}+b_2)$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_1 a_{22} - a_{12}b_2 =$$
$$= \det\left(A_{(1)} \;\; A_{(2)}\right) + \det\left(B \;\; A_{(2)}\right)$$

Vogliamo generalizzare questo a matrici di ordine $n$, per <u>induzione</u> su $n \geq 1$

**Def** Per $A \in M_n(\mathbb{K})$ definiamo $A_{(ij)} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ come la sottomatrice di $A$ ottenuta cancellando la riga $i$-esima e la colonna $j$-esima.

**Es** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & 6\end{pmatrix}$, $A_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -8\end{pmatrix}$, ecc.

**NB** Non confondere $A_{(ij)}$ con $A_{ij} = a_{ij}$.

**Def**. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Chiamiamo <u>determinante</u> di $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ lo scalare definito <u>ricorsivamente</u> (per induzione su $n$) ponendo:

- per $\underline{n=1}$, $\det(a) = a \in \mathbb{K}$,
- per $n \geq 2$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} \det A_{(i1)}$, dove $A_{(i1)} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$

Si scrive anche $\det A = |A|$.

**OSS** Nella sommatoria il segno $(-1)^{i-1}$ inizia con $(-1)^0 = 1$ e si alterna $1, -1, 1, -1, \dots$

**Es** Per $A \in M_2(\mathbb{K})$ si ha: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $A_{(11)} = a_{22}$,
$A_{(12)} = a_{21}$, $A_{(21)} = a_{12}$, $A_{(22)} = a_{11}$.
$\det A = a_{11} A_{(11)} - a_{21} A_{(21)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (formula di prima).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4-(-3) = 7, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ 1 & 147 \end{vmatrix} = 12, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Caso $3 \times 3$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12+1+3(-2) = 7$$

Più in generale per

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Si possono dimostrare le proprietà seguenti (non le dimostriamo)

**Teorema** Per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$ si ha:

1) $\det A = \det {}^tA$
2) Se $A$ ha due colonne (o righe) uguali $\Rightarrow \det A = 0$
3) Se $A'$ è ottenuta da $A$ scambiando due colonne (o due righe) $\Rightarrow$ $\det A' = -\det A$ (operazione elementare di tipo I)
4) Se $A'$ è ottenuta da $A$ moltiplicando <u>una</u> colonna (o riga) per $\lambda \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow \det A' = \lambda \det A$ (operazione elementare di tipo II)
5) Se $A'$ è ottenuta da $A$ con un'operazione elementare di tipo III $\Rightarrow \det A' = \det A$.
6) $\det I_n = 1$

**Def** $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$ è detta:

i) <u>matrice diagonale</u> se $a_{ij}=0 \quad \forall\, i\neq j$ : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}$

ii) <u>triangolare superiore</u> se $a_{ij}=0 \quad \forall\, i>j$ : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \cdots \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}$

iii) <u>triangolare inferiore</u> se $a_{ij}=0 \quad \forall\, i<j$ : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & a_{nn}\end{pmatrix}$

**OSS** $A$ a gradini $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $A$ triangolare superiore

Se $A$ è diagonale la indichiamo anche $A=\mathrm{diag}(a_{11},\dots,a_{nn})$

**Es** $\mathrm{diag}(1,-2,4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

**Prop** $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$ triangolare (inferiore o superiore)

$\Rightarrow \det A = a_{11}\cdots a_{nn}$.

**OSS** In particolare $\det(\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)) = a_1\cdots a_n$.

Metodo di calcolo con Gauss:

$A \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} A'$ a gradini usando <u>solo</u> operazioni elementari di tipo I e III e con $k\geq 0$ operazioni di tipo I

$$\det A = (-1)^k \det A'$$

**Teorema di Binet** $\forall\, A,B\in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(AB)=\det A\cdot\det B$.