Foglio 1

3. Risolvere $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

Notiamo che $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6)$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono date da

$$\{0\} \cup \{\text{soluzioni di } x^2 - 5x + 6\}$$

soluzione di $x = 0$ unione tra insiemi

Risolviamo pertanto $x^2 - 5x + 6 = 0$. Calcoliamo

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$

Quindi questa seconda equazione ha due soluzioni distinte:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2$$

In definitiva, le soluzioni dell'equazione di partenza sono

$$\{0, 2, 3\}$$

4 Risolvere $\frac{2x + 1}{3x - 1} = 0$

Innanzitutto, affinché l'espressione abbia senso, dobbiamo ri-chiedere di escludere i valori che annullano il denominatore, ovvero d'ora in poi dobbiamo imporre

$$3x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1/3$$

A questo punto, notiamo che una frazione vale zero se e solo se il suo numeratore vale zero, pertanto

$$\begin{cases} x \neq 1/3 \\ \dfrac{2x+1}{3x-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1/3 \\ 2x+1 = 0 \end{cases}$$

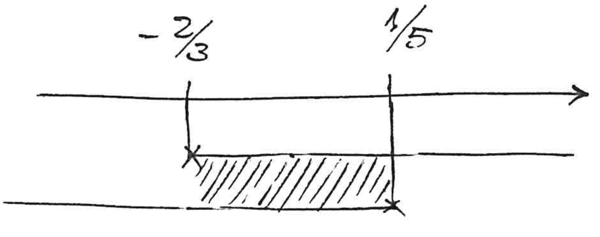
L'equazione $2x+1=0$ ha come soluzione $x = -1/2$, e dato che $-1/2 \neq 1/3$ abbiamo che $-1/2$ è la soluzione dell'equazione iniziale.

6. Risolvere

$$\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 5x - 1 < 0 \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 5x - 1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -2/3 \\ x < 1/5 \end{cases}$$



Le soluzioni sono quindi

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{5} \right\} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right)$$

9. Risolvere

$$|x+3| + |x-4| = 0$$

In principio, al fine di "eliminare i valori assoluti", si possono considerare quattro casi:

(A) $\begin{cases} x-4 \geqslant 0 \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x+4 \geqslant 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x-4 < 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x-4 < 0 \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases}$

Notiamo che

(A) $\Leftrightarrow x \geqslant 4$ (B) non accade mai

(C) $\Leftrightarrow x < -3$ (D) $\Leftrightarrow -3 \leq x < 4$

(A) L'equazione diventa

$$x+3+x-4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

ora, però, $\frac{1}{2}$ non è maggiore o uguale a 4, dunque tale soluzione non va considerata

(C) L'equazione diventa

$$-x-3-x+4=0 \iff$$

$$\iff -2x+1=0 \iff x=1/2$$

anche in questo caso questa soluzione non va considerata

(D) L'equazione diventa

$$x+3-x+4=0 \iff$$

$$\iff 7=0$$

la quale non ha soluzione

In definitiva, la equazione di partenza non ha soluzione. Si poteva anche ragionare in questo modo: dato che il valore assoluto di un numero è sempre ≥ 0, la somma di due valori assoluti può fare zero soltanto se entrambi sono nulli. Pertanto

$$|x+3|+|x-4|=0 \iff \begin{cases} x+3=0 \\ x-4=0 \end{cases}$$

e si vede subito che il sistema a destra non ha soluzioni.

12. Risolvere $\dfrac{-x+1}{6x^2+2} > 0$

Innanzitutto abbiamo sincerarci che l'espressione abbia senso, e pertanto abbiamo richiedere che il denominatore non si annulli. In questo caso, $6x^2+2$ è sempre una quantità positiva ($\Delta<0$ e $6>0$), pertanto non è necessario porre restrizioni.

Dato che il denominatore è sempre una quantità positiva, la funzione razionale è positiva se e solo se lo è il numeratore, ovvero

$$\frac{-x+1}{6x^2+2} > 0 \iff -x+1>0 \iff x<1$$

14. Risolvere $\sqrt{x+5} > x-1$

Innanzitutto richiediamo che $x+5 \geq 0$, ovvero $x \geq -5$, affinché l'espressione non perda di significato. A questo punto, notiamo che, dal momento che una radice quadrata è sempre ≥ 0, allora se il membro destro è negativo la disuguaglianza sarà certamente soddisfatta.

Pertanto si hanno soluzioni quando

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x-1 < 0 \end{cases} \iff -5 \leq x < 1$$

Ora, consideriamo il caso in cui $x-1 \geq 0$. Stiamo quindi comparando due quantità non negative, e quindi ci ricordiamo che, se $z_1 \geq 0$ e $z_2 \geq 0$, allora $z_1 > z_2 \iff z_1^2 > z_2$

Nel nostro caso $z_1 = \sqrt{x+5}$, $z_2 = x-1$. Andiamo quindi a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x-1 \geq 0 \\ x+5 > (x-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x-4 < 0 \end{cases}$$

Soffermiamoci sulla disequazione quadratica $x^2-3x-4<0$

Abbiamo che $\Delta = 9 + 16 = 25$, quindi $\Delta > 0$.

Le due soluzioni dell'equazione associata sono

$$x_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad e \quad x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

Il comportamento del segno dell'espressione quadratica è dato da:

Quindi

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq x < 4 \end{cases} \iff 1 \leq x < 4$$

In definitiva, le soluzioni della disequazione iniziale sono date da

$$\{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 4\} =$$

$$= [-5, 1) \cup [1, 4) = [-5, 4) =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x < 4\}$$