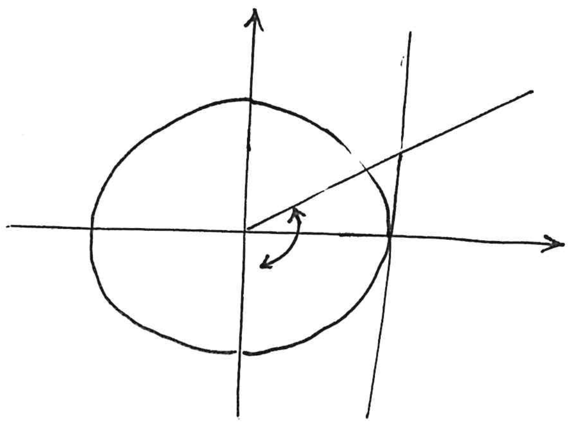
Foglio 2

1. Risolvere $\tan(x) < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Affinché l'espressione abbia senso, dobbiamo chiedere

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ per un qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$.

Aiutiamoci graficamente per risolvere la disequazione:



Notiamo quindi che, se per il momento ricerchiamo soluzioni nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, allora abbiamo che

$$\text{in } (-\pi/2, \pi/2), \quad \tan(x) < \frac{\sqrt{3}}{3} \iff -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$$

Tenendo in considerazione la periodicità della tangente

le soluzioni sono $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. Risolvere $2\cos^2(x) - \cos(x) > 0$

Abbiamo che $2\cos^2(x) - \cos(x) = \cos(x)\left(2\cos(x) - 1\right)$,

quindi è sufficiente comprendere il segno delle quantità $\cos(x)$ e $2\cos(x) - 1$ e selezionare i valori per i quali tali segni sono concordi. Studiamo pertanto il segno delle due quantità $\cos(x)$ e $2\cos(x) - 1$.

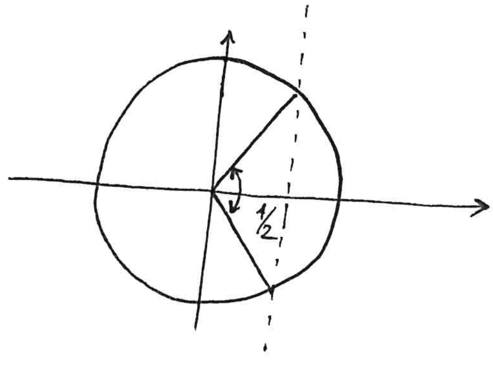
Dalla teoria generale sappiamo che

$\cos(x) > 0$ se e solo se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Come si comporta $2\cos(x) - 1$? Abbiamo

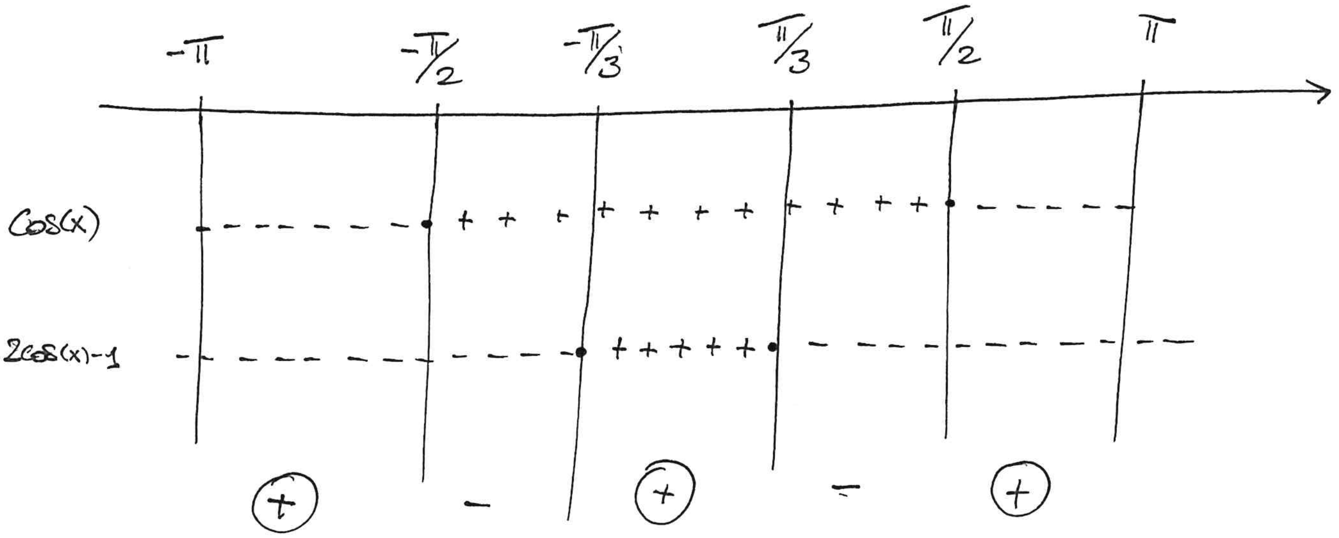
$2\cos(x) - 1 > 0$ se e solo se $\cos(x) > \frac{1}{2}$



$\cos(x) > \frac{1}{2}$ se e solo se $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$

Compariamo i segni delle due quantità quando la variabile del dominio varia tra $-\pi$ e π:



In conclusione otteniamo che i segni delle due quantità sono concordi nell'insieme

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : -\pi + 2k\pi \leq x < -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ x \in \mathbb{R} : -\tfrac{\pi}{3} \, (+2k\pi) < x < \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ x \in \mathbb{R} : \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Il medesimo insieme si può scrivere come

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\pi + 2k\pi, -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(-\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right] \right)$$

8. Risolvere $2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 > 0$

Notiamo che se operiamo la sostituzione

$$t = \cos(x)$$

la disequazione diviene di secondo grado in t:

$$2t^2 + 3t + 1 > 0$$

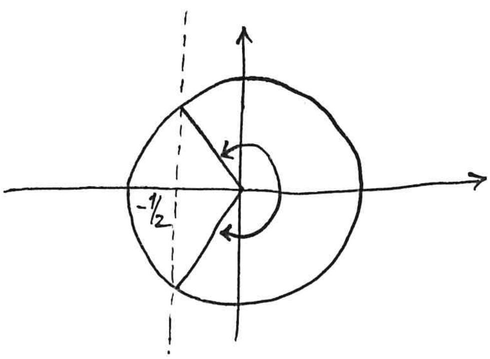
Risolvendola otteniamo che deve essere

$$t < -1 \quad \text{oppure} \quad t > -\tfrac{1}{2}$$

Ricordando che $t = \cos(x)$, deve essere quindi

$$\cos(x) < -1 \quad \text{oppure} \quad \cos(x) > -\tfrac{1}{2}$$

Per le proprietà del coseno sappiamo che la prima richiesta non può mai essere soddisfatta. Analizziamo se e quando la seconda possa essere soddisfatta:



$\cos(x) > -1/2$ se e solo se $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

Quindi in definitiva le soluzioni sono date da:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

10. Risolvere $\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x) < 0$

Notiamo che se poniamo $t = 2x$, la disequazione diviene

$$\cos(t) - \operatorname{sen}(t) < 0$$

Risolviamo questa disequazione con il cosiddetto "metodo grafico", ovvero utilizziamo le sostituzioni

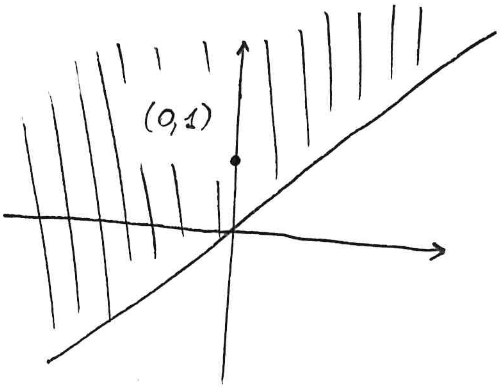
$$\begin{cases} X = \cos(t) \\ Y = \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

Le quantità così definite devono quindi soddisfare

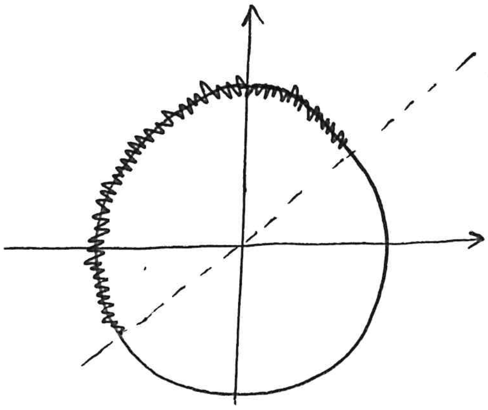
$$\begin{cases} X - Y < 0 & \longleftarrow \text{semipiano} \\ X^2 + Y^2 = 1 & \longleftarrow \text{circonferenza} \end{cases}$$

Geometricamente, il sistema corrisponde a intersecare la circonferenza unitaria centrata nell' origine con un semipiano, il che andrà ad individuare un arco sulla circonferenza; le soluzioni della disequazione originale sono date da quegli angoli che determinano tale arco.

Il semipiano $\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 : X-Y<0\}$ è un semipiano individuato dalla retta $X=Y$, ovvero dalla bisettrice del I e III quadrante



Per individuare quale dei due semipiani sia quello che ci interessa, prendiamo in considerazione ad esempio il punto $(0,1)$: dato che $0-1<0$ è vera, ciò significa che il semipiano da considerare è quello evidenziato



Le soluzioni della disequazione in t sono gli angoli che determinano questo arco.

Quindi le soluzioni di $\cos(t) - \operatorname{sen}(t) < 0$ sono

$$\left\{ t \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{4} + 2k\pi < t < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ora, ricordando che $t = 2x$, le soluzioni della di=

sequazione originaria sono

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{5\pi}{8} + k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

12. Risolvere $\sqrt{\cos(3x) - 1} > 1$

Affinché l'espressione abbia senso, dobbiamo innanzitutto richiedere che

$$\cos(3x) - 1 \geq 0 \iff \cos(3x) \geq 1$$

Ora, sappiamo che il coseno è sempre minore o uguale a 1, pertanto l'unica possibilità in cui si abbia $\cos(3x) \geq 1$ è che valga $\cos(3x) = 1$. Dalle proprietà del coseno sappiamo che ciò accade se e solo se

$$3x = 2k\pi \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff x = \frac{2\pi}{3} \cdot k \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}.$$

Per tali valori di $x \in \mathbb{R}$ si ha quindi che $\cos(3x) - 1 = 0$, pertanto $\sqrt{\cos(3x) - 1} = 0$, e dunque non potrà mai essere che $\sqrt{\cos(3x) - 1} > 0$

14. Risolvere $\cos^2(x) - 4\cos(x)\operatorname{sen}(x) + 4\operatorname{sen}^2(x) \leq 0$.

Notiamo che, se nell'espressione precedente sostituiamo

$$A = \cos(x)$$
$$B = \operatorname{sen}(x)$$

allora essa diviene

$$A^2 - 4AB + 4B^2 = (A - 2B)^2$$

Pertanto, il membro sinistro della disequazione è un quadrato, che è una quantità sempre maggiore o uguale a zero. Se vogliamo quindi che tale quantità, come richiesto dalla disequazione, sia minore o uguale a zero, possiamo soltanto avere che la quantità $(A - 2B)^2$ sia uguale a zero.

Ora, per le proprietà dell'elevamento al quadrato

$$(A-2B)^2 = 0 \iff A - 2B = 0$$

Pertanto, ciò che dobbiamo risolvere è

$$\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x) = 0$$

Risolviamo questa equazione con il metodo grafico.

Poniamo

$$\begin{cases} X = \cos(x) \\ Y = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

e andiamo a risolvere

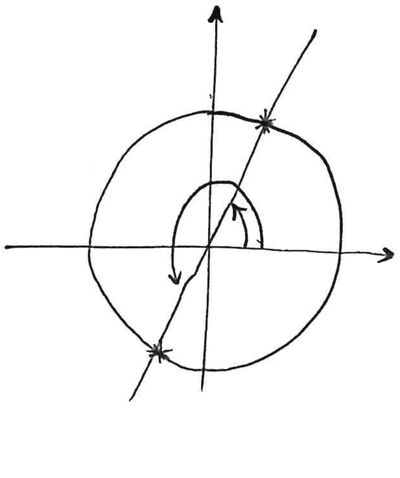
$$\begin{cases} X - 2Y = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} X = 2Y \\ 3Y^2 = 1 \end{cases} \iff X = 2\sqrt{3}/3,\ Y = \sqrt{3}/3$$

oppure

$$X = -2\sqrt{3}/3,\ Y = -\sqrt{3}/3$$



Sia $x_0 \in [0, 2\pi)$ l'unico valore tale che

$$\cos(x_0) = 2\sqrt{3}/3, \quad \operatorname{sen}(x_0) = \sqrt{3}/3$$

Sia $x_1 \in [0, 2\pi)$ l'unico valore tale che

$$\cos(x_1) = -2\sqrt{3}/3, \quad \operatorname{sen}(x_1) = \sqrt{3}/3$$

Allora le soluzioni dell'equazione di partenza sono

$$\{ x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ x_1 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

Se notiamo che $x_1 = x_0 + \pi$, possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni in modo più compatto.

$$\{ x_0 + k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$