Foglio 3

1. Risolvere $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$

Notiamo che, se poniamo $t = 5^x$, allora ci riconduciamo alla equazione quadratica

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

Tale equazione ha come soluzioni

$$t_1 = 1 \quad e \quad t_2 = 2$$

Dobbiamo quindi determinare x_1 e x_2 tali che

$$5^{x_1} = 1 \quad e \quad 5^{x_2} = 2$$

Osserviamo che deve quindi essere

$$x_1 = 0 \quad e \quad x_2 = \log_5 2$$

3. Risolvere $9^{x+1} \leq 3^{x^2 - 1}$

Notiamo che possiamo manipolare le espressioni al fine di ottenere una comparazione tra esponenziali con la medesima base:

$$3^{2x+2} \leq 3^{x^2-1}$$

Dal momento che 3 è maggiore di 1, l'esponenziale di base 3 è crescente dunque

$$3^{2x+2} \leq 3^{x^2-1} \iff 2x+2 \leq x^2-1$$

$$\iff x^2-2x-3 \geq 0$$

L'ultima disequazione ha come soluzioni gli $x \in \mathbb{R}$:

$$x \leq -1 \quad \text{oppure} \quad x \geq 3$$

In altri termini, le soluzioni sono

$$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

6. Risolvere $\log_2(|x^2-4|) = 0$

Ci premuriamo innanzitutto che l'espressione che stiamo considerando abbia senso, ovvero che l'argomento del logaritmo sia positivo. L'argomento del logaritmo è $|x^2-4|$ e, per le proprietà del valore assoluto, l'unico caso in cui questa non sia una quantità positiva è quello in cui valga zero; d'altro canto

$$|x^2-4| = 0 \iff x^2-4=0$$

e l'ultima equazione ha come soluzioni $\{-2, 2\}$.

Pertanto, l'espressione iniziale ha senso se $x \neq 2$ e $x \neq -2$.

Ora, vale che

$$\log_2(|x^2-4|) = 0 \iff |x^2-4| = 1$$

Distinguiamo due casi

(A) $x^2-4 > 0$, il che si ha se e solo se $x \leq -2$ oppure $x \geq 2$

In questo caso, $|x^2-4| = x^2-4$, dunque

$$|x^2-4| = 1 \iff x^2-5=0 \iff$$

$$\iff x=\sqrt{5} \text{ oppure } x=-\sqrt{5}$$

Dato che $\sqrt{5} \geq 2$ e $-\sqrt{5} \leq -2$, entrambi questi valori sono soluzioni della equazione

(B) $x^2-4 < 0$, il che si ha se e solo se $-2 < x < 2$

In questo caso, $|x^2-4| = -x^2+4$, dunque

$$|x^2-4| = 1 \iff x^2-3=0 \iff$$

$\iff \quad x = \sqrt{3}$ oppure $\quad x = -\sqrt{3}$

Dato che $-2 < \sqrt{3} < 2$ e $-2 < -\sqrt{3} < 2$,

entrambi questi valori sono soluzioni dell'equazione.

In definitiva, le soluzioni dell'equazione sono:

$$\left\{ -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5} \right\}$$

11. $\log_2 \left(\log_5 (-x) \right) = 0$ (risolvere)

Innanzitutto, affinché l'espressione abbia senso, dobbiamo richiedere che gli argomenti di entrambi i logaritmi siano positivi, ovvero che

$$\begin{cases} -x > 0 \\ \log_5 (-x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \\ -x > 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \iff x < -1$$

A questo punto osserviamo che

$$\log_2 \left(\log_5 (-x) \right) = 0 \iff \log_5 (-x) = 1 \iff$$

$$\iff -x = 5 \quad \iff x = -5$$

Dunque l'equazione iniziale ha come soluzione -5.

<u>13.</u> Risolvere $\log_{2/3}(x+1) + \log_{2/3}(x-2) > 0$

Affinché l'espressione abbia significato, richiediamo che

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \end{cases} \iff x > 2$$

Cerchiamo di riportare la disequazione a una del tipo

$$\log_{2/3}(z) > 0$$

per qualche espressione z. Usando le proprietà dei logaritmi abbiamo che

$$\log_{2/3}(x+1) + \log_{2/3}(x-2) = \log_{2/3}\left((x+1)(x-2)\right)$$

Quindi dobbiamo risolvere

$$\log_{2/3}\left((x+1)(x-2)\right) > 0$$

Dal momento che la base è minore di 1, il logaritmo è decrescente pertanto l'ultima disuguaglianza equivale a

$$0 < (x+1)(x-2) < 1$$

Ora, $0 < (x+1)(x+2)$ ha soluzione per $x < -1$ oppure $x > 2$; alla luce della condizione di esistenza dei logaritmi abbiamo scartare i valori minori di -1. La condizione

$$(x+1)(x-2) < 1$$

equivale a

$$x^2 - x - 3 < 0$$

la quale è equivalente a

$$x < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{oppure} \quad x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Tenendo in considerazione la richiesta $x > 2$, concludiamo che le soluzioni dell'equazione iniziale sono

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \ x > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

15. Risolvere $\log_2(2x+3) \cdot 5^{x^2-3x+4} = 0$

Per prima cosa ci premuriamo che l'espressione abbia senso, e dunque chiediamo che $2x+3>0$, ovvero $x > -3/2$.

A questo punto notiamo che al membro sinistro compare come fattore un esponenziale, e ricordiamo che la funzio=

ne esponenziale assume sempre valori positivi. Inoltre nei

numeri reali vale la legge di cancellazione, ovvero

se $A \cdot B = 0$ allora $A = 0$ oppure $B = 0$

Nel nostro caso

$$\log_2(2x+3) \cdot 5^{x^2-3x+4} = 0 \Rightarrow \log_2(2x+3) = 0 \text{ oppure } 5^{x^2-3x+4} = 0$$

Dato che, come abbiamo appurato, la situazione $5^{x^2-3x+4} = 0$

non può mai verificarsi, abbiamo che risolvere

$$\log_2(2x+3) \cdot 5^{x^2-3x+4} = 0$$

è equivalente a risolvere

$$\log_2(2x+3) = 0$$

il che ha soluzione $2x+3 = 1 \iff x = -1$.

20. Risolvere $3^{x+1} > 5^{x-2}$

Per risolvere questa disequazione utilizziamo il fatto che

il logaritmo in base 3 è crescente e dunque abbiamo

$$3^{x+1} > 5^{x-2} \iff \log_3(3^{x+1}) > \log_3(5^{x-2}) \iff$$

$$\iff x+1 > (x-2)\log_3 5 \iff$$

$$\iff x(1-\log_3 5) > -1-2\log_3(5)$$

$$\underset{(\log_3 5 > 1)}{\iff} x < \frac{1+2\log_3 5}{1-\log_3 5}$$

Notiamo come abbiamo potuto applicare senza alcuna restrizione il logaritmo ad entrambi i membri dal momento che essi erano sempre quantità positive per le proprietà dell'esponenziale. Quindi le soluzioni sono

$$\left\{ x \in \mathbb{R}. \quad x < \frac{1+2\log_3 5}{1-\log_3 5} \right\}$$

Alternativamente, il precedente insieme si può scrivere come

$$\left(-\infty, \frac{1+2\log_3 5}{1-\log_3 5}\right)$$