

ALEG - esercizi
sesto foglio
prof. Valentina Beorchia

November 27, 2022

1. Si consideri la retta del piano affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases}$$

- Si dimostri che il punto $(0, -2) \in r$;
- sia W la giacitura di r ; si dimostri che il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in W$;
- si dimostri che la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3\tau \\ y = -2 + 6\tau \end{cases}$$

coincide con r

2. Si determini un'equazione cartesiana della retta in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ passante per i punti P e Q in ognuno dei casi seguenti:

- (a) $P = (1, -1)$, $Q = (3, 2)$;
- (b) $P = (2, 0)$, $Q = (-1, -1)$;
- (c) $P = (0, 0)$, $Q = (0, 8)$.

3. Si determinino delle equazioni parametriche per la retta in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ parallela al vettore v e passante per il punto $r \cap s$ in ciascuno dei casi seguenti:

- (a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $r : 3x_1 - 2x_2 = 7$, $s : 2x_1 + 3x_2 = 0$;
- (b) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix}$, $r : x_1 - x_2 = 5$, $s : x_1 + x_2 = 1$.

4. Si determinino delle equazioni cartesiane e parametriche dei piani paralleli al piano coordinato xy , di equazione cartesiana

$$z = 0.$$

5. Si determini un'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ contenente il punto $Q = (-1, 0, 1)$ e parallelo al piano

$$2x_1 - x_3 = \frac{2}{3}.$$

6. In ciascuno dei seguenti casi determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ passante per il punto P e parallela al vettore v :

(a) $P = (-10, -10, 10)$, $v = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $P = (-1, -1, -2)$, $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(c) $P = (7, 1, -1)$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

7. Due rette r ed s di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si dicono complanari se esiste un piano $\pi \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ che le contiene:

$$r \subset \pi, \quad s \subset \pi.$$

In ciascuno dei seguenti casi verificare se le rette r ed s di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono o no complanari. Nel caso affermativo si dica se sono parallele o incidenti.

(a)

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 8 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_1 = 1 - \tau \\ x_2 = 3 + \tau \\ x_3 = 5\tau \end{cases}$$

(b)

$$r : \begin{cases} x_1 = 6 + 2t \\ x_2 = 3 + 2t \\ x_3 = 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_1 = \tau \\ x_2 = \tau \\ x_3 = \tau \end{cases}$$

(c)

$$r : \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 - 2t \\ x_3 = 8 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_1 = \tau \\ x_2 = -5 + \tau \\ x_3 = 2 + \tau \end{cases}$$

8. Determinare un'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ contenente la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

e parallelo al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, si considerino i punti

$$P = (0, -1, 1), \quad Q = (0, 1, 1), \quad R_a = (a, 0, 0),$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si determini il piano affine L_a passante per P , Q ed R_a . Si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che il piano L_a sia parallelo alla retta affine r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

10. Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta $r_a \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ passante per i punti $P = (1, 1, 1)$ e $Q_a = (2, 0, a)$.

Per quali $a \in \mathbb{R}$ la retta r_a è parallela al piano S di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 1$?

11. Nello spazio $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y = a \\ z = 0. \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0. \end{cases}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le rette r_1 e r_2 sono complanari? Per ogni tale a si dica se r_1 ed r_2 sono incidenti oppure no.

12. Nello spazio $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino i punti $P = (1, 1, 0)$, $P' = (1, 2, 3)$, ed i vettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sia r la retta passante per P e con giacitura $\text{Span}(v)$ e sia r' la retta passante per P' e con giacitura $\text{Span}(v')$.

Si dimostri che r ed r' sono sghembe.

Si determinino due piani paralleli π e π' , tali che

$$r \subseteq \pi, \quad r' \subseteq \pi'.$$