

**CORSO DI GEOMETRIA
GEOMETRIA AFFINE
A.A. 2019/2020
PROF. VALENTINA BEORCHIA**

INDICE

1. Tabella delle condizioni di parallelismo e incidenza tra rette nel piano	2
2. Tabella delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani nello spazio	3
3. Tabella delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio	5
4. Tabella delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio	7

1. TABELLA DELLE CONDIZIONI DI PARALLELISMO E INCIDENZA TRA RETTE NEL PIANO

Consideriamo due rette r, r' nel piano affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ di equazioni cartesiane:

$$r : ax + by = c, \quad r' : a'x + b'y = c'.$$

Allora si ha:

$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$	$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	posizione	condizione
1	1	$r \parallel r', r = r'$	$ab' - a'b = 0$
1	2	$r \parallel r', r \cap r' = \emptyset$	$ab' - a'b = 0, \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$
2	2	$r \nparallel r', r \cap r' = \{Q\}$	$ab' - a'b \neq 0$

Consideriamo due rette r, r' nel piano affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ di equazioni parametriche:

$$\pi : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \end{cases} \quad \pi' : \begin{cases} x = R_1 + l'\tau \\ y = T_2 + m'\tau \end{cases}$$

Allora si ha:

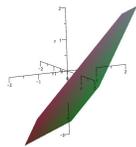
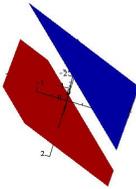
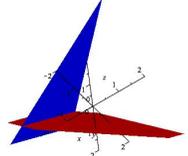
$\text{rg} \begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix}$	posizione
1	$r \parallel r', r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$
2	$r \nparallel r', r \cap r' = \{P\}$

2. TABELLA DELLE CONDIZIONI DI PARALLELISMO E INCIDENZA TRA PIANI NELLO SPAZIO

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$\pi : ax + by + cz = d, \quad \pi' : a'x + b'y + c'z = d'.$$

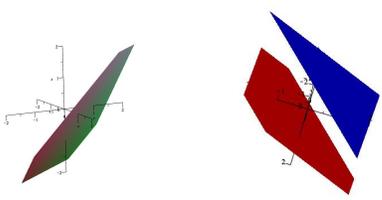
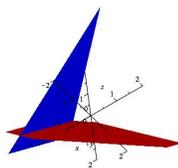
Allora si ha:

$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$	posizione	
1	1	$\pi \parallel \pi', \pi = \pi'$	
1	2	$\pi \parallel \pi', \pi \cap \pi' = \emptyset$	
2	2	$\pi \nparallel \pi', \dim \pi \cap \pi' = 1$	

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$\pi : \begin{cases} x = Q_1 + l_1 t_1 + l_2 t_2 \\ y = Q_2 + m_1 t_1 + m_2 t_2 \\ z = Q_3 + n_1 t_1 + n_2 t_2 \end{cases} \quad \pi' : \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

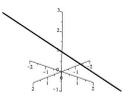
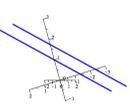
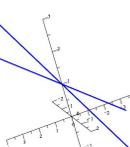
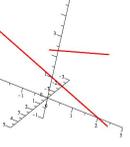
rg $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & o_1 & o_2 \\ m_1 & m_2 & u_1 & u_2 \\ n_1 & n_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$\pi \parallel \pi', \pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$	
3	$\pi \not\parallel \pi', \dim \pi \cap \pi' = 1$	

3. TABELLA DELLE CONDIZIONI DI PARALLELISMO, INCIDENZA E SGHEMBITÀ TRA RETTE NELLO SPAZIO

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} ex + fy + gz = h \\ e'x + f'y + g'z = h' \end{cases}.$$

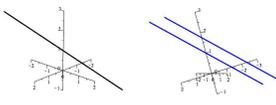
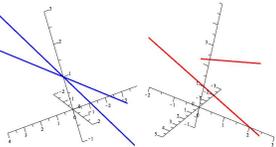
Allora si ha:

$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix}$	$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel s, r = s$	
2	3	$r \parallel s, r \cap s = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel s, r \cap s = \{R\}$	
3	4	$r \nparallel s, r \cap s = \emptyset$	

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = T_1 + os \\ y = T_2 + us \\ z = T_3 + ws \end{cases}$$

Allora si ha:

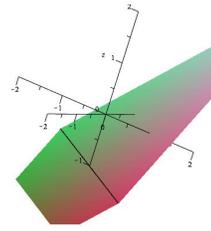
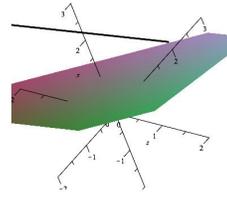
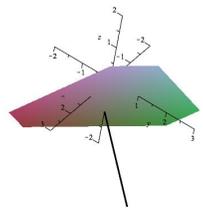
$\text{rg} \begin{pmatrix} l & o \\ m & u \\ n & w \end{pmatrix}$	posizione	
1	$r \parallel r', r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$	
2	$r \not\parallel r', r \cap r' = \{R\}$ un punto oppure $r \cap r' = \emptyset$	

4. TABELLA DELLE CONDIZIONI DI PARALLELISMO E INCIDENZA TRA UNA RETTA E UN PIANO NELLO SPAZIO

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad \pi : ex + fy + gz = h.$$

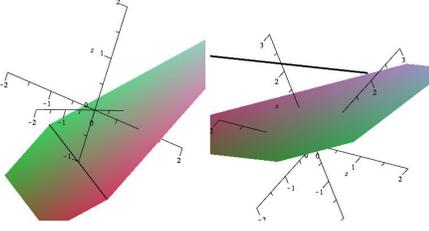
Allora si ha:

$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \end{pmatrix}$	$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel \pi, r \subseteq \pi$	
2	3	$r \parallel \pi, r \cap \pi = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel \pi, r \cap \pi = \{R\}$	

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = T_1 + o_1s_1 + o_2s_2 \\ y = T_2 + u_1s_1 + u_2s_2 \\ z = T_3 + w_1s_1 + w_2s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

$\text{rg} \begin{pmatrix} l & o_1 & o_2 \\ m & u_1 & u_2 \\ n & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$r \parallel \pi$, $r \subseteq \pi$ oppure $r \cap \pi = \emptyset$	
3	$r \not\parallel \pi$, $r \cap \pi = \{R\}$ un punto	