Lezione 17 novembre 22

giovedì 17 novembre 2022 09:36

Visto: determinante di matrice n×n

PROPRIETÀ DEL DET.:

D1 MULTILINEARITÀ DEL DET.:

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, e supp.

$A_{(i)} = R_1 + R_2$ somma di

2 matrici riga, con i arbitrario: $1 \le i \le n$

(es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{(2)} = (1\ 0\ 0) + (0\ 1\ 0)$)

Allora

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R_1 + R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Inoltre: se $\boxed{A_{(i)} = c \cdot R}$, $c \in \mathbb{K}$

(ad esempio $(3\ \ 3\ \ 3) = 3 \cdot (1\ \ 1\ \ 1)$)

allora

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ c \cdot R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

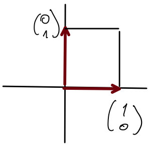
D2 ALTERNANZA o ANTISIMMETRIA del det:

Scambiando 2 righe della matrice A, il det ha segno opposto:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

(D3) Normalizzazione del det

$$\det I_n = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$


$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

il parallelogramma con lati $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ è un quadrato di lato 1, e la sua area è 1.

TEOREMA DI CARATT. DEL DET:

Il det è l'UNICA FUNZIONE

$$M_n(K) \longrightarrow K$$

che verifichi (D1), (D2) e (D3).

COROLLARIO:

① Se A ha 2 righe uguali
$\Rightarrow \det A = 0$

② se A ha una riga tutta nulla
$A_{(i)} = (0 \cdots 0) = 0 \cdot (1\ 1 \cdots 1)$
$\Rightarrow \det A = 0$

③ • se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con r operazioni elementari di tipo OE1, cioè con r scambi di righe, allora

$$\det \tilde{A} = (-1)^r \cdot \det A$$

• se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con una op. elem. di tipo (OE2), allora

$$\det \tilde{A} = c \cdot \det A$$

- se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con OE3, allora $\det \tilde{A} = \det A$.

④ Se A è **TRIANGOLARE SUPERIORE**, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cioè $a_{ij} = 0$ per $i > j$.

allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots \cdot a_{nn}$

In particolare, questo vale se A è DIAGONALE, e anche se A è a scala.

DIM.: Vediamo solo di ④

Per induzione su n:

$n = 1$: $A = (a_{11})$, $\det A = a_{11}$ per def.

= prodotto di elementi su diagonale

Supp. vero per $n-1$; sia $A \in M_n(K)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; \cdots \; a_{1n} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} = A_{11}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} + (-1)^{2+1} \overset{=0}{\underset{=0}{a_{21}}} \cdot \det A_{21} + \ldots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} =$$

$= a_{11} \cdot \underline{\det A_{11}}$ è triangolare superiore

applico ipotesi induttiva

$$\det A_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

TEOREMA: $A \in M_n(\mathbb{K})$. Vale

$$\text{rg}\, A < n \iff \det A = 0$$

Equivalentemente:

$$\text{rg}\, A = n \iff \det A \neq 0$$

COROLLARIO: A è invertibile $\iff \det A \neq 0$.

Dim. del Teorema:

$\Rightarrow$: Supp. $\text{rg}\, A < n$;

metto A a scala con OE, ottengo

$\tilde{A}$: $\text{rg}\, \tilde{A} = \text{rg}\, A < n$

$= \#$ righe non nulle

$\Downarrow$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} * & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & \end{pmatrix}$ ha almeno 1 riga nulla

D'altra parte $\tilde{A}$ è anche triang. sup., quindi $\det \tilde{A}$ = prodotto elementi sulla diagonale

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdots 0$

$= 0$

oppure uso ② del Corollario

$$0 = \det \tilde{A} = (-1)^r \cdot c \cdot \det A$$

$$\Rightarrow \det A = 0$$

Viceversa: $\Leftarrow$

Supp. $\det A = 0 \implies$ deduco $\det \tilde{A} = 0$
metto A a scala $\qquad = (-1)^r \cdot c \cdot \det A$

$\det \tilde{A}$ = prodotto elementi sulla diagonale $= 0$

$\implies$ c'è una riga tutta nulla

$\implies \operatorname{rg} \tilde{A} < n$
$= \operatorname{rg} A$

ALTRE FORMULE PER DET :

Teorema : Sviluppo di LAPLACE del det. per colonne:

$\forall$ indice di colonna $k \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det A_{ik}}$$

Esempio:

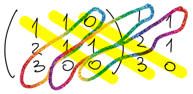
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$

$$\overset{!}{=} a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{21} \cdot \det A_{21} + a_{31} \cdot \det A_{31}$$

$$= 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = \boxed{3}$$

Altro modo: SARRUS



$1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 0$
$- 3 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{3}$

Infine: con Laplace rispetto alla 3^a colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
A_{13}

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} \cdot a_{i3} \cdot \det A_{i3}$$

$$\overset{!}{=} a_{13} \cdot \det A_{13} - a_{23} \cdot \det A_{23} + a_{33} \cdot \det A_{33}$$

$$\overset{!}{=} 0 \cdot (-3) - 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1)$$

$= \boxed{3}$

Teorema: Sviluppo di Laplace per righe:

$A \in M_n(\mathbb{K})$. $\forall$ indice di riga $\ell \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\ell+j} \cdot a_{\ell j} \cdot \det A_{\ell j}}$$

COROLLARIO: $\det A = \det {}^tA$

Dim. le colonne di ${}^tA$ = righe di A

$\det {}^tA$ = sviluppo rispetto prima colonna

= sviluppo di $\det A$ rispetto prima riga

$= \det A$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{c|cc|} \cline{2-3} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \cline{2-3} 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad = A_{33}$$

det con Laplace rispetto la terza riga

$\ell = 3$

$$\det A = (-1)^{3+1} a_{31} \cdot \det A_{31} + (-1)^{3+2} a_{32} \cdot \det A_{32} + (-1)^{3+3} a_{33} \cdot \det A_{33}$$

$$= 3 \cdot 1 - 0 \cdot (\dots) + 0 \cdot (\dots) = 3$$

OSS: "Matrice dei segni" S_{ij} = segno di $(-1)^{i+j}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \end{pmatrix}$$

Vediamo ora che il det ha un

buon comportamento rispetto prodotto RC:

TEOREMA DI BINET:

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\det(\underbrace{A \cdot B}_{n \times n}) = \det A \cdot \det B$$

Dim. OMESSA

CONSEGUENZA:

Supp. A invertibile; $\det(A^{-1}) = ?$

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det \mathbb{I}_n$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} \overset{!}{=} 1$$

$$\Longrightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$