Lezione 21 novembre

lunedì 21 novembre 2022 09:13

FORMULA DEI COFATTORI PER A^{-1}

Def.: Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$\forall\ i, j \in \{1, \dots, n\}$, il COFATTORE (i,j) di A è lo scalare

$$(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

La MATRICE DEI COFATTORI

$$\operatorname{cof} A \in M_n(\mathbb{K})$$

è la matrice $(\operatorname{cof} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

PROP.: $\forall\ A \in M_n(\mathbb{K})$ si ha

$$A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A) = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n$$

$$= {}^t(\operatorname{cof} A) \cdot A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

In particolare, se A è invertibile ($\Leftrightarrow \det A \neq 0$), si ha:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t(\operatorname{cof} A)}$$

Dim. $\left(A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A)\right)_{ij} = \left(\det A \cdot \mathbb{I}_n\right)_{ij}$

$$A_{(i)} \cdot \left({}^t(\operatorname{cof} A)\right)^{(j)} = \det A \cdot \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \underbrace{(\operatorname{cof} A)_{jk}}_{= \left({}^t(\operatorname{cof} A)\right)_{kj}} = \det A \cdot \delta_{ij}$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} \underset{b_{jk}}{a_{ik}} (-1)^{j+k} \cdot \det A_{jk}}\ (*)$$

$i = j \Rightarrow$ $= \det A = \det A \cdot \delta_{jj}$

Se $i = j$, questo è lo sviluppo di Laplace del $\det A$ rispetto alla riga j

Se $i \neq j$, $\circledast$ è il det della matrice

$$\begin{array}{c} \\ \\ j: \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$i \neq j$$

la matrice ha 2 righe uguali, la riga

i e la riga j

$\Longrightarrow$ il det $= 0$

$$\underset{i \neq j}{(*)} = 0 = \det A \cdot \underset{i \neq j}{\delta_{ij}} = \det A \cdot 0 = 0$$

Esempio : $n = 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ;$$

$$(\mathrm{cof}\ A)_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det A_{11} = a_{22}$$

$$(\mathrm{cof}\ A)_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det A_{12} = - a_{21}$$

$$(\mathrm{cof}\ A)_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det A_{21} = - a_{12}$$

$$(\mathrm{cof}\ A)_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det A_{22} = a_{11}$$

$$^{t}(\mathrm{cof}\ A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^{t}(\mathrm{cof}\ A) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] -\dfrac{a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}$$

Applicazione delle formule dei cofattori:

Abbiamo visto il Teorema di Cramer:

$A \in M_n(K)$ invertibile,

allora $A \cdot x = b \Rightarrow \exists!\ s = \boxed{A^{-1} \cdot b}$

COROLLARIO:

FORMULA DI CRAMER

Sia $A \cdot x = b$ con $A \in M_n(K)$ matrice invertibile

Allora l'unica soluzione s è data da:

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \quad \text{con}$$

$$s_i = \frac{\det \boxed{\left(A^{(1)} A^{(2)} \dots \overset{\overset{\text{colonna } i}{\downarrow}}{b}\ A^{(i+1)} \dots A^{(n)} \right)}}{\det A}$$

⇝ MATRICE OTTENUTA DA INSERENDO LA COLONNA b DEI TERMINI NOTI AL POSTO DELLA COLONNA i.

Esempio:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\det A = 3 - (-1) = 4 \neq 0$

$\Rightarrow \exists!\ s$ soluzione, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

$$s_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det A} \quad \begin{matrix} \to A^{(2)} \\ \to b \end{matrix} \quad = \frac{1}{4}$$

$$s_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det A} \quad \begin{matrix} \to A^{(1)} \\ \to b \end{matrix} \quad = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow s = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

* * *

GEOMETRIA AFFINE

Idea: cons. spazi affini

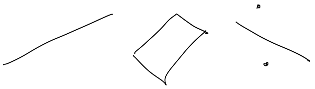
(Spazi di PUNTI), si basano su

SPAZI VETT. (spazio di DIREZIONE)

Oggetti geometrici: punti, rette, piani, iperpiani ...

studiati assegnando EQUAZIONI / eq. CARTESIANE (cioè SL)

\ eq. PARAMETRICHE (il generico punto espresso con parametri)



Studieremo intersezioni tra questi oggetti ⟹ studio di compatibilità di SL.

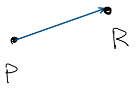
SPAZI AFFINI

Def: Sia V sp. vettoriale su $\mathbb{K}$. Uno SPAZIO AFFINE su V è un insieme non vuoto $\mathbb{A}$, i cui elementi si diranno PUNTI, e una funzione

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$$

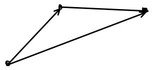
$$\sigma(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \in V$$ tale che:

SA1 $\forall\, P \in \mathbb{A}$, e $\forall\, v \in V$, si ha $\exists!\, R$ t.c. $v = \overrightarrow{PR}$

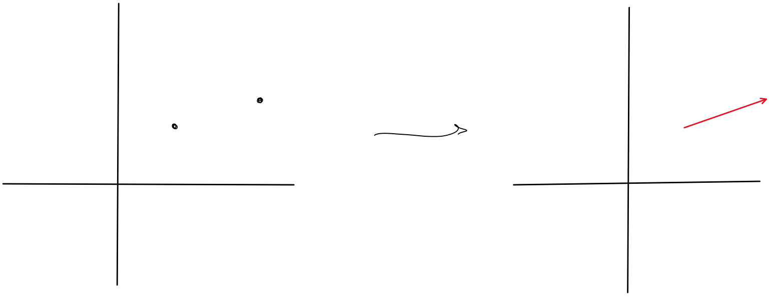


SA2 $\forall$ terne di punti P, Q, R (non nec. distinti) si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$



Esempio: Piano cartesiano ("piano fisico")



Esempio : $\mathbb{A} = \mathbb{K}^n$, (ad esempio $\mathbb{R}^n$)

gli elementi sono n-uple, che denoteremo in ORIZZONTALE:

$$P \in \mathbb{K}^n \qquad P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

lo sp. vettoriale di supporto è

$V = \mathbb{K}^n$ (o $\mathbb{R}^n$)

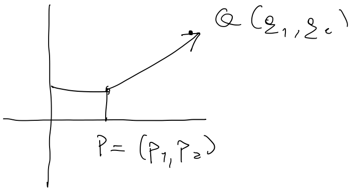
$$v \in \mathbb{K}^n, \qquad v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

infine $\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$

$$\sigma : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$(P, Q) \longrightarrow$$

$$= \left((p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n) \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$



NOTAZIONE : Quando $\mathbb{K}^n$ è considerato come spazio affine, verrà indicato con

^{n}

$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$

LEMMA: Dagli assiomi SA1 e SA2 si ha:

① $\forall\, P \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$ vettore nullo

② $\forall\, P, R \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{RP}$

DEF. $\dim \mathbb{A} := \dim V$

se $\dim \mathbb{A} = 0$: PUNTO AFFINE

se $\dim \mathbb{A} = 1$: RETTA AFFINE

se $\dim \mathbb{A} = 2$: PIANO AFFINE

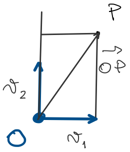
DEF. Un RIFERIMENTO AFFINE per $\mathbb{A}$ è il dato di:

- un punto $O \in \mathbb{A}$: ORIGINE
- una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V

OSS: Dato un RIFERIMENTO AFFINE, ed ogni punto $P \in \mathbb{A}$ possiamo associare delle COORDINATE AFFINI nel modo seguente:

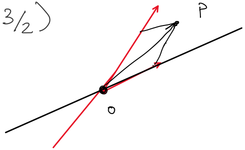
P ha coordinate $(c_1, \dots, c_n)$ se il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha coordinate $(c_1, \dots, c_n)$ nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$, cioè

$$\overrightarrow{OP} = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$



$$\overrightarrow{OP} = 1 \cdot v_1 + \frac{3}{2} \cdot v_2$$

$\rightsquigarrow \; P = (1, 3/2)$

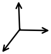


Def: Quando cons. $\mathbb{A}^n_K$ $(= K^n)$

$V = K^n$, se scelgo la

BASE CANONICA:

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

in corrispondenza RIFERIMENTO CANONICO di $\mathbb{A}^n_K$