Lezione 23 novembre 22
mercoledì 23 novembre 2022 08:21

Visto:
Spazio affine, riferimento affine

SOTTOSPAZI AFFINI

Def.: Sia $\mathbb{A}$ sp. affine su V spazio vettoriale

Fissati:
- $Q \in \mathbb{A}$
- $W \subseteq V$ SSV

Allora il **SOTTOSP. AFF. passante per Q e PARALLELO a W** è il sottoinsieme

$$S := \{ P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QP} \in W \}$$

Il SSV W si chiama **GIACITURA** di S.

Esempio:

$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2, \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad Q = (2,1) \in \mathbb{R}^2$$

$$S = \{ P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{QP} \in W \}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in W \right\}$$

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

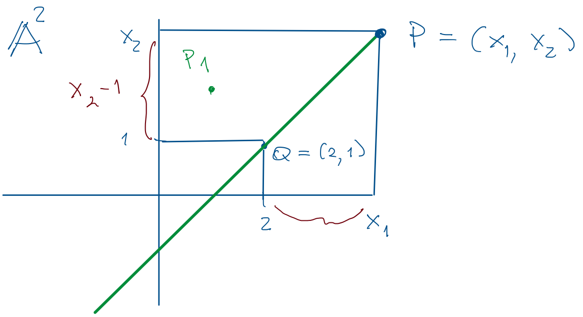
$$= \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

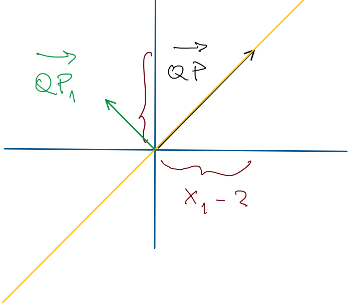
$$= \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow (x_1, x_2) : \begin{cases} x_1 - 2 = t \\ x_2 - 1 = t \end{cases} \rightsquigarrow \text{EQ. PARAMETRICHE di } S$$

ovvero: $\boxed{\begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 + t \end{cases}}$

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = W$$





$\overrightarrow{QP_1} \notin W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, quindi

$P_1 \notin S$

Def: $S \subseteq \mathbb{A}$ ssA (sottosp. affine) con giacitura W, allora poniamo

$$\dim S := \dim W.$$

Nell'esempio di prima, $\dim S = \dim \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 1$

$\Rightarrow$ S è una RETTA AFFINE

PROP.: Dalla def di ssA si ha direttamente:

① se S passa per Q, giacitura W
$\Rightarrow$ $Q \in S$
(Dim: $W \ni 0$ vettore nullo $\Rightarrow$ $\overrightarrow{QQ} \in W$ $\Rightarrow$ $Q \in S$)

② $\forall$ coppia di punti $P_1, P_2 \in S$, si ha $\overrightarrow{P_1P_2} \in S$

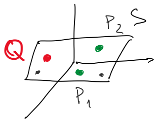
(Dim. $P_1 \in S \Rightarrow \overrightarrow{QP_1} \in W \xRightarrow{W \text{ SSV}} -\overrightarrow{QP_1} \in W$

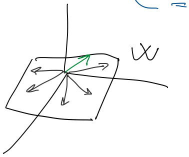
$= \overrightarrow{P_1Q}$

$P_2 \in S \Rightarrow \overrightarrow{QP_2} \in W$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_1Q}, \overrightarrow{QP_2} \in W \Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{QP_2}}_{= \overrightarrow{P_1P_2}} \in W$$

(SA 1)





③ S è a sua volta uno spazio affine su W.

Def.: $S \subseteq A$; se $\dim S = \dim A - 1 = n - 1$

$\dim A = n$

S si dice IPERPIANO

Es: $A = A^2_{\mathbb{R}}$, $\dim S = 2 - 1 = 1$

iperpiani = rette affini

$A = A^3_{\mathbb{R}}$, $\dim S = 3 - 1 = 2$

iperpiani = piani affini

$A = A^4_{\mathbb{R}}$, $\dim S = 4 - 1 = 3$

iperpiani

* * *

EQUAZIONI DI SSA

Teorema: Sia $A\cdot x = b$ un SL

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Allora se $A\cdot x = b$ è compatibile, l'insieme delle soluzione è un SSA di $A^n_{\mathbb{K}}$ $(=\mathbb{K}^n)$, con giacitura

W SSV delle soluzioni di $A\cdot X = 0$.

In tal caso: $\dim S = \dim W = n - rg A$.

Le equazioni $A\cdot X = b$ si dicono

EQUAZ. CARTESIANE per S.

Dim.: Teorema di Struttura per soluz. di SL:

$\forall$ s soluz. di $A\cdot X = b$, si ha

$$s = \tilde{s} + s_0, \quad A\cdot\tilde{s} = b, \quad A\cdot s_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad s - \tilde{s} = s_0 \in W \quad \text{SSV}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{s} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ \tilde{s}_n \end{pmatrix},$$

$$s - \tilde{s} = \begin{pmatrix} s_1 - \tilde{s}_1 \\ s_2 - \tilde{s}_2 \\ \vdots \\ s_n - \tilde{s}_n \end{pmatrix} \in W$$

è la def. di SSA

in cui il punto Q corrisponde all'n-pla $(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n)$

e W al SSV delle soluzioni di $A\cdot X = 0$.

__OSS.__: Sia S SSA delle soluz. di $A \cdot X = b$. Ogni SL equivalente determina delle altre eq. cartesiane per S. In particolare, operando con OE su $(A|b)$ troviamo altre eq. cartesiane.

Es: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases} \iff \boxed{3x_1 - 2x_2 = 1}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II} - 2 \cdot \text{I}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$S : \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{s}} + \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{S_0}$$

$\Rightarrow S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ passa per

$Q = (1/3, 0)$

e la giacitura è $W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Quindi l'insieme delle soluzioni del SL rappresenta effettivamente un sotto spazio affine di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, e precisamente una retta affine.

Vediamo che tutto ciò è confermato dal Teorema appena visto: l'enunciato ci dice che S è SSA con

$$\dim S = \dim W = n - \text{rg} A = 2 - 1 = 1$$

retta affine

inoltre: $W: \quad A \cdot X = 0$

$\Longleftrightarrow \tilde{A} \cdot X = 0$

$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} t \\ t \end{pmatrix} : \quad 3 \cdot \frac{2}{3} t - 2 \cdot t =$$

$$= 2t - 2t \quad = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

EQ. PARAMETRICHE:

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^n$

S passante per $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

e con giacitura $W = \operatorname{Span}(\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{base di } W})$

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

$P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \quad \Longleftrightarrow$

$\overrightarrow{QP} \in W \quad \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 w_1 + \dots + t_k w_k$$

al variare di $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$, trovo tutti i punti di S

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + \dots + t_k \cdot \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_1 w_{11} + \cdots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ t_1 w_{n1} + \cdots + t_k w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = a_1 + t_1 w_{11} + \cdots + t_k w_{1k} \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = a_n + t_1 w_{n1} + \cdots + t_k w_{nk} \end{cases}}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI S

NEI PARAMETRI $t_1, \ldots, t_k$