Lezione 24 novembre

giovedì 24 novembre 2022 10:16

Visto: $S \subseteq \mathbb{A}^n_K = K^n$, S ammette

eq. param: $Q \in S$: $Q = (q_1, \dots, q_n)$

$W = \mathrm{Span}((w_1, \dots, w_k))$

$\dim W = k$

$$\begin{cases} \overset{P}{x_1} - \overset{Q}{q_1} = \overset{\text{parametri}}{t_1}\, \overset{\text{comp. di } w_1}{w_{11}} + \dots + t_k\, \overset{\text{comp. di } w_k}{w_{1k}} \\ \vdots \\ x_n - q_n = t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases} \qquad \circledast$$

PASSAGGIO DA EQ. PAR. A EQ. CARTESIANE

$\circledast \iff$ il vettore $\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = \vec{QP}$

è comb. lin. di $w_1, \dots, w_k$

$\iff w_1, \dots, w_k, \vec{QP}$ sono $k+1$ vettori

LIN. DIPEND. $\iff$

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} & x_1 - p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nk} & x_n - p_n \end{pmatrix} = k$$

è una matrice $n \times (k+1)$

Usando gradinizz. di Gauss, metto la matrice a scala; avrò rango $= k$

$\iff$ ha k righe non nulle $\iff$ le ultime $n-k$ righe sono nulle

In questo modo troviamo $n-k$ equazioni lineari nelle $x_1, \dots, x_n$.

COR ①: Ogni SSA S di dim k, può essere espresso con $n-k$ eq. lineari.

COR: ② In particolare, se $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ è un IPERPIANO, cioè $\dim S = n-1$, allora S può essere espresso con

$k = n-1$, $n-k = n-(n-1) = 1$ EQ CART.

OSS E viceversa, vale che il SSA dato delle soluzioni di

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = d$$

allora S ha dim data dal Teo. di ieri:

$$\dim S = n - rg\, A = n-1 \Rightarrow S \text{ è iperpiano}$$

$$A = (a_1 \quad a_2 \cdots \quad a_n)$$

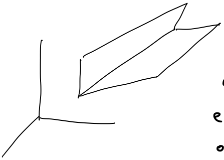
matrice $1 \times n$

$\boxed{rg\, A = 1}$ ($rg\, A = 0$ NO, perché altrimenti non c'è alcuna equazione)

OSS.: Se $S \subseteq \mathbb{A}^3$ è una retta, cioè $\dim S = 1$ $\Rightarrow$ sono necessarie

$n - \dim S = 3-1 = 2$ equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \rightsquigarrow \text{determina un piano} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2 \rightsquigarrow \text{determ. un piano} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ ogni retta dello spazio $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si può esprimere come intersezione di due piani.

Geometria piana affine:

Cons. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è simile)

$\dim \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

$S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ SSA

$$\dim S = \begin{cases} 0 \Longrightarrow S \text{ è un punto } \{Q\} \\ 1 \Longrightarrow S \text{ è una retta} \\ 2 \Longrightarrow S = \mathbb{A}^2 \end{cases}$$

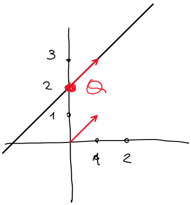
S retta: : $Q \in S$, $Q = (q_1, q_2)$

$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right)$ con $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ eq. par. S $\begin{cases} x - q_1 = l\,t \\ y - q_2 = m\,t \end{cases}$

Passo a eq. cartesiana (1 eq. cart.)

$$\text{rg}\begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ \boxed{m} & \underline{y - q_2} \end{pmatrix} = 1$$



Es.:

$Q = (0, 2)$

$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \to l \\ 1 \to m \end{pmatrix}\right)$

eq. param. $\begin{cases} x - 0 = 1 \cdot t \\ y - 2 = 1 \cdot t \end{cases}$ $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$

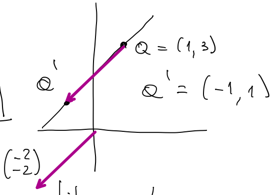
eq. cartesiane:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & x-0\\ 1 & y-2\end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 1 & y-2\end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y-x-2\end{pmatrix}$$

ha rg 1 $\iff$ $y-x-2=0$

$$\boxed{y = x+2}$$



OSS: Posso scegliere Q liberamente su S, e anche la base di W

Troverò altre espressi

$Q = (1,3)$, $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right)$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix}-1 - 1\\ 1 - 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$

eq. par.:

$$\begin{cases} x-1 = -2t \\ y-3 = -2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3-2t \end{cases}$$

eq. cart.:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-2 & x-1\\ -2 & y-3\end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix}-2 & x-1\\ -2 & y-3\end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix}-2 & x-1\\ 0 & y-3-x+1\end{pmatrix}$$

$rg = 1 \iff y - x - 2 = 0 \qquad y = x + 2$

* * *

RETTA PER 2 PUNTI:

Siano $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$

$P \neq Q$

Retta per P e Q : r

posso scegliere Q come punto base : $Q \in r$

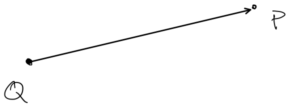
$P \in r \iff \overrightarrow{QP} \in W$

$$\begin{array}{c} \| \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}p_1 - q_1\\p_2 - q_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l\\m\end{pmatrix}$$

$\dim W = 1 \implies \mathrm{Span}(\overrightarrow{QP}) = W$

$\Rightarrow$ retta per 2 punti $\exists$, ed è unica.



eq. par. :

$$\boxed{\begin{cases} x - q_1 = (p_1 - q_1)\cdot t \\ y - q_2 = (p_2 - q_2)\cdot t \end{cases}}$$

Eq. cartesiana :
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} p_1 - q_1 & x - q_1 \\ p_2 - q_2 & y - q_2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \det = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(p_1 - q_1)(y - q_2) - (p_2 - q_2)(x - q_1) = 0}$$

$$\Downarrow \quad / : \big((p_1 - q_1)\cdot(p_2 - q_2)\big)$$

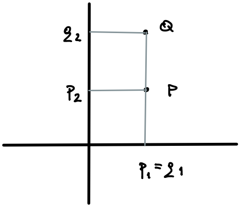
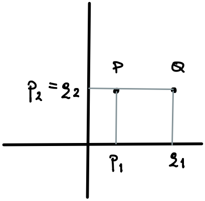
⚠

si può fare $\Longleftrightarrow$ $p_1 - q_1 \neq 0$

e $p_2 - q_2 \neq 0$

$$\boxed{\frac{y - q_2}{p_2 - q_2} = \frac{x - q_1}{p_1 - q_1}}$$

SONO ESCLUSE RETTE
VERTICALI E ORIZZONTALI

Questa equazione non è lecita nei casi: