Lezione 17

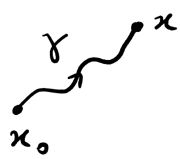
Prop X contraibile $\Rightarrow$ connesso per archi.

Dim $H : X \times I \to X$ omotopia

$h_0 = x_0 =$ costante, $h_1 = id_X$

$\forall x \in X \rightsquigarrow \gamma : I \to X$, $\gamma(t) = H(x,t)$

$\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$.



Def Sia $A \subset X$ un sottospazio. Una <u>retrazione</u> di X su A è un'applicazione continua $r : X \to A$ t.c. $r(a) = a$ $\forall a \in A$.

OSS $r : X \to A$ retrazione $\Leftrightarrow$ r continua e $r \circ i_A = id_A$

con $i_A : A \hookrightarrow X$ inclusione

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[rr, bend right, "id_A"'] & X \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd}$$

Es $r : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to S^1$

$r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ retrazione.

Def Un'omotopia $H : X \times I \to X$ è detta <u>retrazione per deformazione forte</u> di X su $A \subset X$ se valgono le seguenti:

i) $h_0 = id_X$

ii) $h_1(X) = A$

iii) $h_t(a) = a$ $\forall a \in A$, $\forall t \in I$.

H è detta <u>retrazione per deformazione debole</u> se valgono (i), (ii) e

iii') $h_1(a) = a$ $\forall a \in A$

Def Diciamo che X si <u>deforma</u> su $A \subset X$ o che A è <u>retratto di deformazione forte</u> di X se $\exists$ $H : X \times I \to X$ retrazione per deformazione forte. Scriviamo $X \simeq_s A$. In modo simile nel caso debole.

Oss $H : X \times I \to X$ retrazione per deformazione (forte o debole) $\Rightarrow$
$r := h_1| : X \to A$ retrazione (restrizione di h_1 al codominio).

Prop $X \leadsto A$ fortemente o debolmente $\Rightarrow X \simeq A$.

Dim $i_A : A \hookrightarrow X$ inclusione, $r := h_1| : X \to A \Rightarrow h_1 = i_A \circ r \simeq id_X$
$r \circ i_A = id_A \Rightarrow r$ inversa omotopica di i_A equivalenza omotopica.

OSS 1) Deformazione forte $\Rightarrow$ deformazione debole

2) X contraibile $\Leftrightarrow X$ si deforma debolmente su un suo punto
infatti (i) e (iv) equivalgono a $id_X \simeq$ costante per $A = \{a\}$.

3) $X \leadsto \{x_0\} \Rightarrow X$ contraibile

4) $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $a \in X \Rightarrow X \leadsto \{a\}$
$H : X \times I \to X$, $H(x,t) = (1-t)x + ta$.

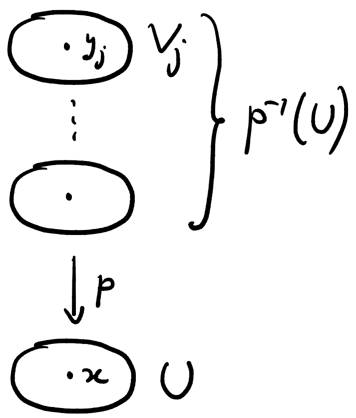
5) $\mathbb{R}^n - \{0\} \leadsto S^{n-1}$ $\quad H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n - \{0\}$
$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}.$$

Rivestimenti

Def Siano X e Y spazi. Un'applicazione continua $p : Y \to X$ è un rivestimento di X se $\exists\, J$ spazio discreto e $\forall x \in X\ \exists\, U \subset X$ intorno aperto di x t.c.

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j \quad \text{con } V_j \subset X \text{ aperto e}$$

$$p_j := p_{|V_j} : V_j \xrightarrow{\cong} U \quad \text{omeo } \forall j \in J.$$



Un tale U è detto aperto ben rivestito o banalizzante, V_j foglio su U.
Le applicazioni $p_j^{-1} : U \to V_j$ sono dette inverse locali di p, $\forall j \in J$.
J è detto fibra di p.

OSS 1) p rivestimento $\Rightarrow$ p suriettiva e aperta $\boxed{E}$

2) $y_j = p^{-1}(x) \cap V_j \Rightarrow p^{-1}(x) = \{y_j \mid j \in J\} \cong J$ discreto $\forall x \in X$.

3) p rivestimento $\Rightarrow$ p omeo locale.

4) $p : Y \to X$ omeo $\Rightarrow$ p rivestimento.

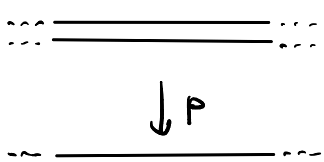
$\# J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ è detto <u>numero di fogli</u> di p.

Def Un rivestimento $p : Y \to X$ è <u>banale</u> se X è aperto banalizzante per p.

OSS $p : Y \to X$ rivestimento banale $\Leftrightarrow$ $Y = \bigsqcup_{j \in J} Y_j$ con $p_j : Y_j \xrightarrow{\cong} X$ omeo $\forall j \in J$.

Quindi un aperto $U \subset X$ è banalizzante per p $\Leftrightarrow$ $p_| : p^{-1}(U) \to U$ rivestimento banale.

Es 1) $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}$



$p = id$ su ciascuna copia di $\mathbb{R}$

2) Più in generale $\forall J$ discreto, $\forall X$,

$\pi_X : X \times J \to X$, $\pi_X(x, j) = x$ rivestimento banale.

Lemma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva $\Rightarrow$ f omeo

Dim Basta far vedere che f è aperta.

$\forall a < b$, $A = f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ intervallo compatto $\Rightarrow$ $A = [c,d]$.

$f(\{a,b\}) = \{c,d\}$. Infatti se per assurdo $c < f(a) < d$ $\Rightarrow$

$\underbrace{f(]a,b])}_{\text{connesso}} = \underbrace{[c,d] - \{f(a)\}}_{\text{non connesso}}$ contraddizione. In modo simile $f(b) \in \{c,d\}$.

$\Rightarrow f(]a,b[) =]c,d[\Rightarrow f$ manda aperti base in aperti $\Rightarrow f$ aperta.