

Dimostrare $f \in C^0(I)$ e differenziabile
in I

1) f crescente in I

2) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

1) $\Rightarrow$ 2)

Se f è crescente e $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \underbrace{x - x_0}_{< 0}}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \geq 0$$

2 $\Rightarrow$ 1

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Prendere una coppia x_1, x_2 in I

con $x_1 < x_2$

Nell'intervallo $[x_1, x_2]$ applico
Lagrange. È facile capire che

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

e che $[x_1, x_2] \subseteq I$.

P_{SW} applica Lagrange ed $\exists c \in (x_1, x_2)$

$$b.c. \quad 0 \leq f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall x_1 < x_2 \text{ in } I.$$

A hand-drawn graph of a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a grid. The function is piecewise linear, starting at a low value, increasing to a peak, and then decreasing. The x-axis is labeled with $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$f \in C^0(\mathbb{R}), \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall x \neq x_0$$

$\Rightarrow f$ è crescente in $\mathbb{R}$.

$f \in C^0(I)$ derivierbar in I° , x

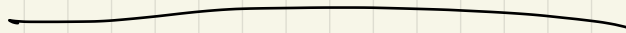
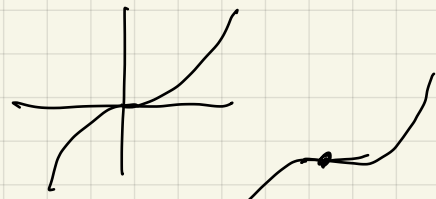
$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente crescente.

Il viceversa è falso. Esempio

$f(x) = x^3$ è strettamente crescente
in $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

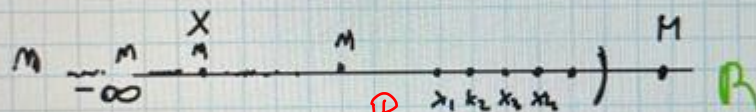
can

$$f'(0) = 0.$$



DIMOSTRAZIONE:

sabato 26 novembre 2022 17:49

IPOTESI: DIMOSTRARE CHE SE $X \subseteq \mathbb{R}$ È TALE CHE $\inf X = -\infty$ TESI: ALLORA $\forall M \in \mathbb{R}$ ESISTE $x \in X$ CON $x < M$ SupponiamoPER ASSURDO ^{de} ESISTE UN M T.C.: $\forall x \in X \quad M < x \in X \Rightarrow M \leq \inf X = -\infty$ ASSURDO ✓^{2° momento dell'int}DIMOSTRAZIONE ES 4.38 PG 31IPOTESI: $X \subseteq \mathbb{R}$ È TALE CHE $\sup X = +\infty$ TESI: ALLORA $\forall M \in \mathbb{R} \exists x \in X$ CON $M < x$

DIMOSTRAZIONE ES 4.38 PG 31

IPOTESI: $X \subseteq \mathbb{R}$ è tale che $\sup X = +\infty$

TESI: Allora $\forall M \in \mathbb{R} \exists x \in X$ con $M < x$

$\mathbb{R} \quad \overset{x}{|} \quad \text{---} \quad +\infty$

PROCEDO PER ASSURDO:

Se $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in X, M > x \Rightarrow$ DA FINIRE $+\infty > M \geq \sup X = +\infty$

$\Rightarrow \quad +\infty > +\infty$ assurdo

Dato $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$
 allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x-a) = L \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

Per fare le cose consideriamo $L \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ significa

$$\textcircled{1} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \text{ t.c. } x > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Fisso un $a \in \mathbb{R}$ e voglio dimostrare

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x-a) = L$; cioè che

$$\textcircled{2} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon \text{ t.c. } x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x-a) - L| < \varepsilon$$

so, dallo $\textcircled{1}$ che se $x-a > N_\varepsilon$
 $\Rightarrow |f(x-a) - L| < \varepsilon$

$$x-a > N_\varepsilon \Leftrightarrow x > \underbrace{N_\varepsilon + a}$$

Se definisco

$$M_\varepsilon = N_\varepsilon + a$$

hw che $x > M_\varepsilon \Rightarrow x - a > N_\varepsilon$

$$\Rightarrow |f(x-a) - L| < \varepsilon.$$