Soluzioni del tema scritto del 14/2/2022.

1)

a) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$: si osservi che A è diagonale a blocchi;

dunque $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = (-9)(-3) =$

$= 27.$

b) Il polinomio caratteristico è

$$p_A(x) = \det \left|\begin{array}{cc|cc} -x & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -x & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1-x \end{array}\right| = (x^2-9)((1-x)^2-4) =$$

$$= (x-3)(x+3)(1-x+2)(1-x-2) = (x-3)^2(x+3)(x+1).$$

Vi sono dunque 3 autovalori:

$\lambda_1 = 3$ con $m_a(3) = 2$,

$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = -1 \end{array}\right\}$ entrambi con molteplicità algebrica 1, e quindi anche molteplicità geom. 1.

Per verificare se A è diagonalizzabile, calcoliamo

$$m_g(3) = \dim \mathrm{Aut}(3) = 4 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$= 4 - 2 = 2.$

Dunque, poichè $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore, A è diagonalizzabile e precisamente è simile a $D = \begin{pmatrix} 3 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$.

una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = D$ deve avere nelle colonne una base di autovettori:

$Aut(3) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ cioè lo spazio delle soluzioni del sistema lineare:

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ la generica soluzione è del tipo $(x_1, x_1, x_3, 2x_3)$ e

una base di $Aut(3)$ è $\{(1,1,0,0), (0,0,1,2)\}$.

$Aut(-3) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$

una base è $(1,-1,0,0)$.

$Aut(-1) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

e una base è data da $(0,0,1,-2)$. Dunque

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Sia A $n \times n$ diagonalizzabile il cui unico autovalore è 1. Allora $p_A(x) = (x-1)^n$ e $m_g(1) = n = \dim \mathrm{Aut}(1)$. Quindi l'autospazio di 1 ha dim n ed è perciò tutto K^n: ciò significa che <u>ogni</u> vettore di K^n è autovettore di autovalore 1; ossia $Ax = x = L(A)(x)\ \forall x$. Quindi $L(A)$ è l'applicazione identica, e quindi A è la matrice identica.

3) a) $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ con $u_1 = (1,2,0,-2)$, $u_2 = (0,1,-1,2)$, $u_3 = (0,0,1,-1)$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 3

e ha u_1, u_2, u_3 nelle righe $\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ sono linearmente indipendenti e dunque formano una base di U. $\dim U = 3$.

W: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ il sistema è già a gradini, lo risolviamo

e troviamo una base di W: $\tilde{w} = (1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)$,

o meglio $(3, -2, 1, 3) = w$; $\dim W = 1$.

b) $U + W$ è generato da u_1, u_2, u_3, w.

Allora $\dim(U+W) = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

con trasformazioni elementari otteniamo

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 25 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

: ha $rg\ 4$, perciò $U + W = \mathbb{R}^4$ e per Grassmann $U \cap W = (0)$.

c) una base ortonormale di W si ottiene normalizzando $w = (3, -2, 1, 3)$.

$\|w\| = \sqrt{9+4+1+9} = \sqrt{23} \implies w_1 = \frac{1}{\sqrt{23}}(3,-1,1,3)$.

Per trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ prolungando w_1, si potrebbe usare il procedimento di Gram-Schmidt. Però in questo caso i conti sono molto complicati e propongo un modo più veloce.

Considero $w^\perp$, definito da $3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$, ossia $x_1 = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - x_4$. Una sua base è formata da $(\frac{2}{3},1,0,0), (-\frac{1}{3},0,1,0), (-1,0,0,1)$.

Prendo $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)$. Ora considero

$$U = \langle w_1, w_2\rangle^\perp : \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 = x_4 \end{cases}$$

U ha come base $(1,0,-6,1)$ e $(0,1,2,0)$.

Prendo $w_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2,0)$. Ora uso Gram-Schmidt:

$$(1,0,-6,1) + \frac{12}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2,0) =$$

$$= (1,0,-6,1) + \frac{12}{5}(0,1,2,0) = (1, \tfrac{12}{5}, -\tfrac{6}{5}, 1).$$

$$w_4 = \frac{1}{\sqrt{230}}(5, 12, -6, 5).$$

4) a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 3 $\Rightarrow v_1, v_2, v_3$

formano una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Per il teorema di determinazione di un'appl. lineare, comunque scelti 3 vettori di $\mathbb{R}^3$, esiste una e una sola applicazione lineare di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che manda v_1, v_2, v_3 nei 3 vettori scelti.

c) $\operatorname{Im} f = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$; la sua dim è uguale al rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ il cui determinante è 0.

Quindi ha rango 2 (ha 2 righe non proporzionali). Perciò $\operatorname{Im} f$ ha dim 2 ed è generata per esempio da w_1, w_2.

Dunque $\operatorname{Ker} f$ ha dim 1. Troveremo poi una sua base.

d) Osserviamo che

$$e_1 = (1\ 0\ 1) - (0,0,1) = v_1 - \tfrac{1}{2} v_3$$

$$e_2 = (0,1,-1) + (0,0,1) = v_2 + \tfrac{1}{2} v_3$$

$e_3 = \frac{1}{2} v_3$.

Perciò $f(e_1) = f(v_1) - \frac{1}{2} f(v_3) = (3,1,0) - \frac{1}{2}(2,1,2) =$

$= (2, \frac{1}{2}, -1)$

$f(e_2) = f(v_2) + \frac{1}{2} f(v_3) = (-1,0,2) + \frac{1}{2}(2,1,2) =$

$= (0, \frac{1}{2}, 3)$

$f(e_3) = \frac{1}{2} f(v_3) = (1, \frac{1}{2}, 1)$.

Perciò $M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

D'altra parte $w_1 = (3,1,0) = 3(1,0,1) + (0,1,-1) - (0,0,2)$
$= 3 v_1 + v_2 - v_3$

$w_2 = (-1,0,2) = -(1,0,1) + \frac{3}{2}(0,0,2) = -v_1 + \frac{3}{2} v_3$

$w_3 = (2,1,2) = 2(1,0,1) + (0,1,-1) + \frac{1}{2}(0,0,2)$
$= 2 v_1 + v_2 + \frac{1}{2} v_3$

Perciò $f(v_1)$ ha coordinate $(3,1,-1)$ rispetto a $\mathcal{B}$, $f(v_2)$ ha coord. $(-1,0,\frac{3}{2})$ e $f(v_3)$ ha coord. $(2,1,\frac{1}{2})$.

Perciò $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Infine $\operatorname{Ker} f$ è dato da $M_{\mathcal{B}}(f)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ che ha soluzione $(1, 1, -2)$.