Lezione 22

Def Sia $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$, e scegliamo un'entrata a_{ij} di A. Si chiama <u>cofattore</u> o <u>complemento algebrico</u> di a_{ij} lo scalare

$$\mathrm{cof}(A)_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{(ij)}$$

dove $A_{(ij)}$ è la sottomatrice di A ottenuta cancellando la riga i e la colonna j.

Es $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ il cofattore di a_{23} è $(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1$.

mentre $\mathrm{cof}(A)_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}=-2$.

Def Sia $A\in M_n(\mathbb{K})$. La <u>matrice cofattore</u> di A è

$$\mathrm{cof}\,A:=\left(\mathrm{cof}(A)_{ij}\right)\in M_n(\mathbb{K}).$$

Quindi $\mathrm{cof}\,A$ ha come entrata (i,j) il cofattore di a_{ij}.

Es $\mathrm{cof}\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathrm{cof}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&2&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$

Usando la definizione di determinante e le sue proprietà viste (det cambia segno scambiando due colonne, $\det {}^tA=\det A$) si ottiene:

Formule di Laplace Sia $A\in M_n(\mathbb{K})$. Allora $\forall\, i,j$ si ha:

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}A_{kj}\,\mathrm{cof}(A)_{kj}\quad(\text{sviluppo di }\det A\text{ secondo la colonna }j)$$

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}\,\mathrm{cof}(A)_{ik}\quad(\text{sviluppo di }\det A\text{ secondo la riga }i)$$

In pratica conviene sviluppare secondo la riga o colonna col maggior numero di zeri.

Es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10$

Supponiamo ora che A' si ottenga da $A \in M_n(\mathbb{K})$ mediante operazioni sulle righe di tipo I e III (non II) e sia k il numero di operazioni di tipo I. Allora se A' è a gradini:

$$\det A = (-1)^k \det A' = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} A'_{ii} = (-1)^k A'_{11} \cdots A'_{nn}$$

Infatti le operazioni di tipo III non cambiano il det, mentre quelle di tipo I cambiano il segno.

Es $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 41 \end{vmatrix} = 41$

Teorema Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora $\operatorname{rg} A = n \iff \det A \neq 0$.
Inoltre se A è invertibile si ha $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\operatorname{rg} A = n \iff A$ invertibile $\Rightarrow A A^{-1} = I_n \Rightarrow$

$$1 = \det I_n = \det(A A^{-1}) \underset{\text{Binet}}{=} \det(A) \det(A^{-1}) \Rightarrow$$

$$\det A \neq 0 \quad \text{e} \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \neq 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\det A \neq 0$. $A \rightsquigarrow A'$ a gradini con operazioni di tipo I e III

$\Rightarrow 0 \neq \det A = (-1)^k \det A' = (-1)^k A'_{11} \cdots A'_{nn} \Rightarrow A'_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

dove k è il numero di operazioni elementari di tipo I.

$\Rightarrow A'_{11}, \dots, A'_{nn}$ pivot di $A' \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = n$.

Teorema Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora

$$A \cdot {}^t\mathrm{cof}(A) = \det(A) \cdot I_n .$$

Dim $\left(A\,{}^t\mathrm{cof}(A)\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\left({}^t\mathrm{cof}(A)\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\mathrm{cof}\,A)_{jk}$

Se $i=j$, $\left(A\,{}^t\mathrm{cof}(A)\right)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,(\mathrm{cof}\,A)_{ik} = \det A$

è lo sviluppo di $\det A$ secondo la riga i.

Se $i \neq j$ sia B la matrice ottenuta da A sostituendo la riga j con la riga i, quindi la riga i è ripetuta due volte $\Rightarrow \det B = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

$$B_{jk} = A_{ik} \quad , \quad (\mathrm{cof}\,B)_{jk} = (\mathrm{cof}\,A)_{jk}$$

Sviluppando $\det B$ secondo la riga j si ottiene

$$0 = \det B = \sum_{k=1}^{n} B_{jk}(\mathrm{cof}\,B)_{jk} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\mathrm{cof}\,A)_{jk} = \left(A\,{}^t\mathrm{cof}\,A\right)_{ij} \quad , \; i \neq j.$$

$\Rightarrow \left(A\,{}^t\mathrm{cof}\,A\right)_{ij} = \left(\det(A)\, I_n\right)_{ij} \;\; \forall\, i,j$. Questo conclude la dimostrazione.

Corollario Sia $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Allora

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{cof}\,A}$$

Dim $\det A \neq 0 \Rightarrow A \underbrace{\left(\frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{cof}\,A\right)}_{A^{-1}} = I_n$

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 4$, $\quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Regola di Cramer Sia $S : AX = B$ un sistema lineare con $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Allora S ha un'unica soluzione data da

$$x_i = \frac{\det \hat{A}_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove $\hat{A}_i$ è la matrice ottenuta da A mettendo B al posto della colonna i di A.

Dim Sappiamo che S ha l'unica soluzione

$$X = A^{-1} B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\!\operatorname{cof} A \implies x_i = (A^{-1}B)_i = \frac{1}{\det A}\left(\left({}^t\!\operatorname{cof} A\right) B\right)_i =$$

$$= \frac{1}{\det A} \left({}^t\!\operatorname{cof}\right)^{(i)} B = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)_{(i)} B = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{cof} A)_{ki} B_k$$

$$= \frac{1}{\det A} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} B_k (\operatorname{cof} A)_{ki}}_{\text{sviluppo secondo la colonna } i \text{ di } \hat{A}_i} = \frac{\det \hat{A}_i}{\det A}$$

Es $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -10$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{3}{10}.$$