Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

6. Determinante

In questo capitolo definiamo il determinante di una matrice quadrata e ne studiamo le principali proprietà, vedremo anche alcune applicazioni al calcolo delle soluzioni dei sistemi di equazioni lineari ed al calcolo della matrice inversa.

Definizione 1. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$ una matrice quadrata di ordine n a coefficienti nel campo K, siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Il* **minore** *(i, j) di A è la matrice $A_{ij} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$ che si ottiene da A cancellando la riga i-ma e la colonna j-ma.*

Esempio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Per $(i, j) = (2, 2)$ ed $(i, j) = (2, 3)$, rispettivamente, si ottengono i seguenti minori:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definizione 2. *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un numero naturale non nullo. Definiamo il* **determinante** *di una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ in modo ricorsivo a partire dal determinante di matrici 1×1 come segue.*
Se $n = 1$, quindi $A = (a_{11})$, il determinante di A si definisce come $\det(A) = a_{11}$.
Se $n > 1$ il determinante di A si definisce ricorsivamente per mezzo dei determinanti dei minori $A_{i1} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$, per $i = 1, \dots, n$, come segue:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}). \tag{1}$$

Esempio 2. **1.** Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$. Dalla formula (1) abbiamo:

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}).$$

Poiché $A_{11} = (a_{22})$ ed $A_{21} = (a_{12})$ sono matrici 1×1, dalla definizione precedente abbiamo che $\det(A_{11}) = a_{22}, \det(A_{21}) = a_{12}$. In conclusione

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2. Il punto precedente fornisce una formula per il calcolo del determinante di una qualunque matrice 2×2. Quindi, usando la formula (1), possiamo calcolare il determinante di una qualsiasi matrice 3×3:

$$
\begin{aligned}
\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{31}\det(A_{31}) \\
&= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}\right) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}\,.
\end{aligned}
$$

Per esempio

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -15 - 20 + 60 = 25\,.
\end{aligned}
$$

Usando la formula precedente per il determinante di una matrice 3×3 possiamo calcolare il determinante di una qualsiasi matrice 4×4 tramite la (1), e così via.

Teorema 1. *Sia $n \geq 1$ e sia $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$. Valgono le seguenti proprietà del determinante.*

(D1) Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, se la riga i-ma di A, $A_{(i)}$, è somma di due righe $R', R'' \in \mathrm{M}_{1,n}(K)$, $A_{(i)} = R' + R''$, allora

$$
\det(A) = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ R' \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ R'' \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.
$$

Se $A_{(i)} = cR'$, per qualche scalare $c \in K$ ed $R' \in \mathrm{M}_{1,n}(K)$, allora

$$
\det(A) = c\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ R' \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.
$$

(D2) Scambiando due righe di A il determinante cambia segno: se $i < j \in \{1, \dots, n\}$, allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

(D3) $\det(\mathrm{I}_n) = 1$, *dove* I_n *è la matrice unità di ordine* n.

Dim. (D1) Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$, il risultato segue direttamente dalla definizione del determinate per matrici 1×1.

$\underline{n - 1 \Rightarrow n}$. Per ipotesi, A ha la seguente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dove $R' = \begin{pmatrix} a'_{i1} & \dots & a'_{in} \end{pmatrix}$ ed $R'' = \begin{pmatrix} a''_{i1} & \dots & a''_{in} \end{pmatrix}$.

Sia $A' \in \mathrm{M}_n(K)$ (rispettivamente $A'' \in \mathrm{M}_n(K)$) la matrice che ha le stesse righe di A tranne la i-ma che è uguale ad R' (rispettivamente R''), $A' = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ R' \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$, $A'' = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ R'' \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$. Dobbiamo dimostrare che $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$. Dalla formula (1) abbiamo:

$$\det(A) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\det(A_{k1}) + (-1)^{i+1}(a'_{i1}+a''_{i1})\det(A_{i1})\,.$$

Osserviamo che, se $k \neq i$, allora $\det(A_{k1}) = \det(A'_{k1}) + \det(A''_{k1})$ per ipotesi induttiva, dove A'_{k1} (rispettivamente A''_{k1}) è il minore $(k,1)$ di A' (rispettivamente di A''). Mentre, se $k = i$, $A_{i1} = A'_{i1} = A''_{i1}$. Quindi

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\left(\det(A'_{k1}) + \det(A''_{k1})\right) + (-1)^{i+1}(a'_{i1}+a''_{i1})\det(A_{i1})\\ &= \det(A') + \det(A'')\,.\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione della prima affermazione. Per dimostrare la seconda affermazione, procediamo analogamente. Abbiamo che

$$\det(A) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\det(A_{k1}) + ca'_{i1}\det(A_{i1})\,.$$

Osserviamo che, se $k \neq i$, $\det(A_{k1}) = c\det(A'_{k1})$ per induzione, mentre $A_{i1} = A'_{i1}$. Quindi

$$\det(A) = c\det(A')\,.$$

(D2) Procediamo per induzione su n. Nel caso $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare, quindi supponiamo che l'enunciato sia vero per $n-1$ e dimostriamolo per n. A tal fine, sia $A' \in \mathrm{M}_n(K)$ la matrice che si ottiene da A scambiando la riga i-ma con la riga j-ma, per qualche $i \neq j$, $i, j \in \{1,\dots,n\}$. Quindi

$$A'_{(k)} = \begin{cases} A_{(k)} & , \quad \text{se} \quad k \neq i, j\,;\\ A_{(j)} & , \quad \text{se} \quad k = i\,;\\ A_{(i)} & , \quad \text{se} \quad k = j\,.\end{cases}$$

In seguito supporremo senza perdita di generalità che $i < j$.

Riscriviamo la formula (1) come segue:

$$\det(A') = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}(-1)^{k+1}a'_{k1}\det(A'_{k1}) + (-1)^{i+1}a'_{i1}\det(A'_{i1}) + (-1)^{j+1}a'_{j1}\det(A'_{j1})\,.$$

Osserviamo che $a'_{k1} = a_{k1}$, se $k \neq i, j$, mentre $a'_{i1} = a_{j1}$ ed $a'_{j1} = a_{i1}$. Inoltre, per ipotesi induttiva, $\det(A'_{k1}) = -\det(A_{k1})$, se $k \neq i, j$. Per calcolare $\det(A'_{i1})$

osserviamo che

$$A'_{i1} = \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

e quindi, scambiando prima la riga $(j-1)$-ma di A'_{i1} con la $(j-2)$-ma, poi la $(j-2)$-ma con la $(j-3)$-ma, e così via, dopo $(j-1-i)$ scambi, la matrice A'_{i1} si trasforma in A_{j1}. Poiché $A'_{i1} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva, quindi $\det(A'_{i1}) = (-1)^{j-1-i}\det(A_{j1})$. In maniera analoga si dimostra che $\det(A'_{j1}) = (-1)^{j-1-i}\det(A_{i1})$.

Dalle precedenti osservazioni concludiamo che

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1}[-\det(A_{k1})] + (-1)^{i+1} a_{j1} (-1)^{j-1-i}\det(A_{j1}) \\ &\quad + (-1)^{j+1} a_{i1}(-1)^{j-1-i}\det(A_{i1}) \\ &= -\det(A)\,. \end{aligned}$$

(D3) Anche in questo caso procediamo per induzione su n. Il caso $n=1$ è chiaro, supponiamo quindi vera l'affermazione per $n-1$. Dalla formula (1) abbiamo che

$$\det(\mathrm{I}_n) = 1 \cdot \det((\mathrm{I}_n)_{11}),$$

dove $(\mathrm{I}_n)_{11}$ denota il minore $(1,1)$ di I_n. Poiché $(\mathrm{I}_n)_{11} = \mathrm{I}_{n-1}$, per induzione $\det(\mathrm{I}_{n-1}) = 1$, e quindi $\det(\mathrm{I}_n) = 1$. □

Corollario 1. *Sia $n \geq 1$ un intero, e sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*
1) Se A ha due righe uguali, allora $\det(A) = 0$.
2) Se A ha una riga nulla, allora $\det(A) = 0$.
3) Se $\tilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di una sequenza di operazioni elementari del tipo OE1 ed OE3, allora

$$\det(\tilde{A}) = (-1)^{\sigma}\det(A),$$

dove σ è il numero di operazioni elementari di tipo OE1 effettuate.
4) Se A è triangolare superiore (cioè se $a_{ij} = 0$, per ogni i, j con $i > j$), allora $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$, *dove $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$.*
5) Se A è diagonale o a scala $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Dim. 1) Supponiamo che $A_{(i)} = A_{(j)}$, per qualche $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$. Allora scambiando la riga i-ma di A con la j-ma, la matrice A non cambia. D'altra parte, per la proprietà (D2), questo scambio comporta un cambio di segno del determinante, quindi $\det(A) = -\det(A)$, da cui segue che $\det(A) = 0$.

2) Se $A_{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, allora $A_{(i)} = 0 \cdot R$, per ogni $R \in \mathrm{M}_{1,n}(K)$. Quindi, dalla proprietà (D1) segue: $\det(A) = 0 \cdot \det(A') = 0$.

3) Segue direttamente dalle proprietà (D1), (D2) e dal punto 1).

4) Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ l'enunciato è chiaro.
$\underline{n \Rightarrow n+1}$ Sia quindi $A \in \mathrm{M}_{n+1}(K)$ una matrice triangolare superiore. Dalla definizione si ha:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) \,.$$

Siccome A è triangolare superiore, $a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{n+1,1} = 0$, quindi $\det(A) = a_{11} \det(A_{11})$. Osserviamo che il minore A_{11} è una matrice triangolare superiore, quindi per ipotesi induttiva $\det(A_{11}) = a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{n+1,n+1}$. Da questo segue l'enunciato.

5) Segue dal punto precedente poiché ogni matrice diagonale o a scala è triangolare superiore. Si può anche dare una dimostrazione diretta di questo punto per matrici diagonali come segue. Per la proprietà (D1) abbiamo:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} a_{22} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \ldots \\
&= a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \det(\mathrm{I}_n) = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \,.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 1. Le proprietà 1), 2), 3) e 5) del precedente corollario sono una conseguenza delle proprietà (D1), (D2) e (D3) soltanto, e non della definizione di determinante. Infatti nella dimostrazione di 1), 2) e 3) non abbiamo usato la definizione e si può dimostrare la proprietà 5) usando soltanto le (D1), (D2) e (D3) come segue. Sia A una matrice a scala. Se A ha una riga nulla allora $\det(A) = 0$, quindi vale la formula in 5). Altrimenti tutte le righe di A sono diverse dalla riga nulla e con operazioni elementari di tipo 3 è possibile trasformare A in una matrice diagonale. Il risultato ora segue dalla proprietà 3) e dalla validità di 5) per matrici diagonali (si veda la dimostrazione di quest'ultima affermazione data nel precedente corollario).

Esempio 3. Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ usando le proprietà 1–4 del corollario. A tale scopo trasformiamo dapprima A a scala usando le OE1 ed OE3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 13 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} \end{pmatrix}.$$

Ora, siccome i pivot della matrice a scala ottenuta sono tutti gli elementi sulla diagonale principale, possiamo usare le OE3 per ottenere una matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} \end{pmatrix} =: \tilde{A}\,.$$

Osserviamo che per passare da A ad $\tilde{A}$ non abbiamo usato OE1, quindi $\det(A) = \det(\tilde{A}) = 25$.

Teorema 2. *Sia $n \geq 1$ un intero, e sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Allora,*

$$\mathrm{rg}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0\,.$$

Dim. Supponiamo che $\mathrm{rg}(A) = n$. Sia $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})$ una matrice a scala ottenuta da A tramite operazioni elementari di tipo 1 e 3. Poiché $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = \mathrm{rg}(A) = n$, $\tilde{A}$ non ha righe nulle, quindi $\det(\tilde{A}) = \tilde{a}_{1,1} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{n,n} \neq 0$. Dal Corollario 1, 3), segue che $\det(A) = \pm \det(\tilde{A}) \neq 0$.

Viceversa, se $\det(A) \neq 0$, una matrice a scala che si ottiene da A tramite OE1 ed OE3 non può avere righe nulle (sempre il Corollario 1, 3)), quindi $\mathrm{rg}(A) = n$. □

Corollario 2. *Sia $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, allora*

$$\mathrm{rg}(A) = \max\{\mathrm{ord}(B) \,|\, B \textit{ è una sottomatrice quadrata di } A \textit{ con } \det(B) \neq 0\}\,.$$

Dim. Segue direttamente combinando il Teorema 4 del Capitolo 5 (Rango) ed il precedente Teorema 2. □

Vediamo alcuni esempi tipici in cui il precedente corollario trova applicazione.

Esempio 4. 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,5}(\mathbb{R})$. Siccome A è una matrice 2×5, $\mathrm{rg}(A) \leq 2 = \min\{2, 5\}$. Osserviamo che la sottomatrice $A(1, 2|1, 2)$ ha determinante $= 4$, quindi per il precedente corollario $\mathrm{rg}(A) = 2$.

2. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Siccome A è una matrice 3×4, $\mathrm{rg}(A) \leq 3 = \min\{3, 4\}$. Osserviamo che $A_{(1)} = A_{(2)} + A_{(3)}$, quindi le righe di A sono linearmente dipendenti, da cui segue che $\mathrm{rg}(A) < 3$. Siccome $\det(A(1, 2|2, 3)) = -2 \neq 0$, $\mathrm{rg}(A) \geq 2$ per il precedente corollario, quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Un'altra importante conseguenza del Teorema 2 è il seguente corollario.

Corollario 3. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Allora A è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.*

Dim. Dal Teorema 3 del Capitolo 5 segue che A è invertibile $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n$. Per il Teorema 2, $\mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. □

Il seguente risultato afferma che, nell'espressione (1) per il determinante di una matrice A, si può rimpiazzare la prima colonna con una colonna qualsiasi $A^{(j)}$. Questo è particolarmente vantaggioso se A ha una colonna con molti zeri.

Teorema 3 (Sviluppo di Laplace del determinante per colonne)**.** *Sia $n \geq 1$ un intero, e sia $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$. Per ogni indice di colonna $j \in \{1, \dots, n\}$, vale la seguente espressione del determinante di A:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \, ,$$

dove $A_{ij} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$ è il minore (i, j) di A.

Dim. Definiamo $\delta \colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ come la funzione che associa ad ogni $A \in \mathrm{M}_n(K)$

$$\delta(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \, .$$

In modo analogo alla dimostrazione del Teorema 1, si dimostra che δ soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3). Dalla Proposizione 2 (si veda la fine del capitolo) segue che $\det(A) = \delta(A)$, $\forall A \in \mathrm{M}_n(K)$. □

Teorema 4 (Sviluppo di Laplace del determinante per righe)**.** *Sia $n \geq 1$ un intero, e sia $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$. Per ogni indice di riga $i \in \{1, \dots, n\}$, vale la seguente espressione del determinante di A:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \, ,$$

dove $A_{ij} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$ è il minore (i, j) di A.

Dim. Osserviamo che la riga i-ma di A si può scrivere come segue:

$$A_{(i)} = a_{i1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{{}^t e_1} + a_{i2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{{}^t e_2} + \dots + a_{in} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{{}^t e_n} ,$$

dove $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ sono i vettori della base canonica di K^n interpretati come elementi di $\mathrm{M}_{n,1}(K) = K^n$, e ${}^t e_1, \ldots, {}^t e_n \in \mathrm{M}_{1,n}(K)$ sono le rispettive trasposte. Quindi

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ a_{i1}{}^t e_1 + \ldots + a_{in}{}^t e_n \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Per la proprietà (D1) del Teorema 1, si ha che

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ {}^t e_j \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Sia

$$B_j := \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ {}^t e_j \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che, per ogni $j = 1, \ldots, n$, è possibile trasformare B_j, per mezzo di operazioni elementari di tipo OE3, nel seguente modo:

$$B_j \to \tilde{B}_j := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Per lo sviluppo di Laplace del determinante di $\tilde{B}_j$ lungo la j-ma colonna, abbiamo che $\det(\tilde{B}_j) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, inoltre per il punto 3) del Corollario 1, deduciamo che $\det(B_j) = \det(\tilde{B}_j) = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$. Quindi,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\det(B_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})\,.$$

□

Esempio 5. 1. Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 5 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ -9 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché sulla terza colonna ci sono molti zeri, è conveniente sviluppare $\det(A)$ lungo questa colonna. In tal modo otteniamo:

$$\det(A) = -(-3)\det(A_{23}) = 3\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ -9 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante del minore A_{23}, usiamo lo sviluppo lungo la quarta colonna, otteniamo

$$\det(A) = 3(-4)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \\ -9 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora, sviluppando lungo la terza colonna, otteniamo

$$\det(A) = -12(-2)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} = 24\cdot(-1) = -24\,.$$

2. Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

sviluppando lungo la seconda riga,

$$\det(A) = -\det(A_{21}) = -\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 27 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante del minore A_{21} usiamo lo sviluppo lungo la seconda riga:

$$\det(A) = -\det\begin{pmatrix} 0 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ed ora sviluppiamo lungo la prima colonna, otteniamo

$$\det(A) = -\det\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -27\,.$$

Riportiamo il seguente teorema, senza dimostrazione.

Teorema 5 (Binet)**.** *Sia $n \geq 1$ un intero, e siano $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$. Allora*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)\,.$$

Corollario 4. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Se A è invertibile, allora*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,.$$

Dim. Se A è invertibile, l'inversa di A è (l'unica) matrice tale che $A \cdot A^{-1} = \mathrm{I}_n$. Dal Teorema di Binet segue che

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1\,.$$

Da questo segue il risultato. □

Teorema 6. *Sia $n \geq 1$ un intero, e sia $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$. Allora*

$$\det(A) = \det({}^tA)\,.$$

Dim. Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$, $A = {}^tA$, quindi $\det(A) = \det({}^tA)$. Supponiamo che l'enunciato sia vero per $n-1$ e dimostriamolo per n. Usiamo la formula (1), ed osserviamo che l'elemento di posto $(i, 1)$ di ${}^tA$ coincide con a_{1i}, e che il minore $(i, 1)$ di ${}^tA$ coincide con la trasposta ${}^t(A_{1i})$ del minore $(1, i)$ di A, otteniamo quindi

$$\det({}^tA) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det\left({}^t(A_{1i})\right)\,.$$

Per ipotesi induttiva, $\det\left({}^t(A_{1i})\right) = \det\left(A_{1i}\right)$, quindi

$$\det({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det\left(A_{1i}\right)\,,$$

che coincide con lo sviluppo di Laplace di $\det(A)$ lungo la prima riga di A, quindi $\det({}^tA) = \det(A)$. □

Concludiamo il capitolo con due applicazioni del determinante, al calcolo della matrice inversa, ed al calcolo delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari.

Definizione 3. *Sia $n \geq 1$ un intero, e sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, il* **cofattore** *$(i, j)$ di A è lo scalare*

$$(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \, ,$$

dove A_{ij} è il minore (i, j) di A. La **matrice dei cofattori** *di A è la matrice $\mathrm{cof}(A) \in \mathrm{M}_n(K)$ il cui elemento di posto (i, j) è il cofattore (i, j) di A,*

$$(\mathrm{cof}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \, ,$$

per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposizione 1. *Sia $n \geq 1$ un intero, e sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Allora*

$$A \cdot {}^t\,(\mathrm{cof}(A)) = \det(A)\mathrm{I}_n \, . \tag{2}$$

In particolare, se A è invertibile ($\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$),

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\,(\mathrm{cof}(A)) \, .$$

Dim. Osserviamo che (2) è equivalente alle seguenti equazioni

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, (\mathrm{cof}(A))_{jk} = \det(A)\delta_{ij} \, , \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \, ,$$

dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se}\, i = j \, , \\ 0 & , \quad \text{se}\, i \neq j \end{cases}$. Usando la definizione di $(\mathrm{cof}(A))_{jk}$, le precedenti equazioni diventano:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} \det(A_{jk}) = \det(A)\delta_{ij} \, , \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \, . \tag{3}$$

Osserviamo che, per ogni $i = 1, \ldots, n$, e per $j = i$, l'equazione (3) corrispondente coincide con lo sviluppo di Laplace di $\det(A)$ lungo la i-ma riga. Mentre, se $i \neq j$, il lato sinistro di (3) coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la j-ma riga del determinante della matrice B che si ottiene da A sostituendo la riga j-ma con la i-ma. Siccome B ha due righe uguali, $\det(B) = 0$, e quindi la corrispondente equazione (3) è verificata. $\square$

Esempio 6. 1. Usando la precedente proposizione, si ottiene la seguente espressione per l'inversa di una matrice 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, con $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \, .$$

Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

Corollario 5 (Regola di Cramer)**.** *Sia* $n \geq 1$ *un intero, sia* $A \in \mathrm{M}_n(K)$ *una matrice invertibile, e sia* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$*. Allora il sistema di equazioni lineari* $A \cdot x = b$ *ha un'unica soluzione*

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b\,,$$

con

$$s_i = \frac{\det\left(A^{(1)} \quad \dots \quad A^{(i-1)} \quad b \quad A^{(i+1)} \dots \quad A^{(n)}\right)}{\det(A)}\,, \quad i = 1, \dots, n\,.$$

Dim. Se A è invertibile $\mathrm{rg}(A) = n$ e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema lineare ha un'unica soluzione s. Siccome $A \cdot (A^{-1} \cdot b) = b$, $s = A^{-1} \cdot b$. Dalla proposizione precedente segue che:

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{cof}(A))_{ki}\, b_k \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \det(A_{ki}) b_k \\ &= \frac{1}{\det(A)} \det\left(A^{(1)} \quad \dots \quad A^{(i-1)} \quad b \quad A^{(i+1)} \dots \quad A^{(n)}\right)\,, \end{aligned}$$

l'ultima equazione segue dallo sviluppo di Laplace del determinante della matrice $\left(A^{(1)} \quad \dots \quad A^{(i-1)} \quad b \quad A^{(i+1)} \dots \quad A^{(n)}\right)$ lungo la i-ma colonna. $\square$

Esempio 7. 1. Consideriamo il seguente sistema di 3 equazioni lineari nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + 2z & = 1 \\ -x + 3y + z & = 0 \\ x + 7z & = 1\,. \end{cases}$$

La matrice completa associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}\,.$$

Osserviamo che $\det(A) = 3(7 - 2) = 15$ (sviluppando lungo le seconda colonna), quindi per la regola di Cramer il sistema lineare ha un unica soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 1\,, \\
y &= \frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,, \\
z &= \frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\,.
\end{aligned}$$

2. La regola di Cramer può essere usata anche per risolvere sistemi di equazioni lineari la cui matrice dei coefficienti non è quadrata. Ad esempio, consideriamo il seguente sistema di 2 equazioni lineari nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + y - 5z & = 6 \\ 3x - y + z & = 2\,. \end{cases}$$

Possiamo riscrivere il sistema come segue

$$\begin{cases} x + y & = 6 + 5z \\ 3x - y & = 2 - z\,, \end{cases}$$

ed interpretare quest'ultimo come un sistema di 2 equazioni lineari, nelle incognite x, y, con termine noto $\begin{pmatrix} 6+5z \\ 2-z \end{pmatrix}$. La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Siccome $\det(A) = -4 \neq 0$, possiamo usare la regola di Cramer ed ottenere

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 6+5z & 1 \\ 2-z & -1 \end{pmatrix} = 2 + z\,, \\
y &= -\frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 6+5z \\ 3 & 2-z \end{pmatrix} = 4 + 4z\,,
\end{aligned}$$

si ottengono ∞^1 soluzioni, con variabile libera z.

1 Complementi

Il determinante è una funzione $\det\colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ che associa ad ogni matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ il suo determinante $\det(A)$ (come definito nella Definizione 2), per ogni ogni intero positivo $n \geq 1$. La seguente proposizione afferma che $\det\colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ è l'unica funzione che soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3) del Teorema 1.

Proposizione 2 (Unicità del determinante)**.** *Sia* $\delta\colon \mathrm{M}_n(K) \to K$*, con* $n \geq 1$*, una funzione che soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3), allora* $\delta = \det$.

Dim. Osserviamo che δ soddisfa le proprietà 1), 2), 3) e 5) del Corollario 1 (si veda l'Osservazione 1). Usando questo fatto dimostriamo che $\delta(A) = \det(A)$, per ogni $A \in \mathrm{M}_n(K)$. A tale scopo distinguiamo due casi.
Caso1: $\mathrm{rg}(A) < n$. Allora dal Teorema 2 segue che $\det(A) = 0 = \delta(A)$. Notiamo che nella dimostrazione del Teorema 2 abbiamo usato solo le proprietà (D1), (D2), (D3).
Caso2: $\mathrm{rg}(A) = n$. In questo caso possiamo trasformare A in una matrice diagonale usando le OE1, OE3. Quindi il risultato segue dal Corollario 1, 5). $\square$