

VIOLAZIONE DI CP NELLO SM

C: coniugazione di carica

scambia particella ed antiparticella

coniugando numeri quantici interni, es. $Q \rightarrow -Q$

Su spinori:

$$\psi \xrightarrow{C} -i \gamma_2 \psi^*$$

$$\psi^* \xrightarrow{C} -i \gamma_2 \psi$$

P: parità

Manda $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ e $t \rightarrow t$.

spin $\hat{s} \rightarrow \hat{s} \Rightarrow$ inverte l'elicità (chiralità se $m=0$)

$$\psi \xrightarrow{P} \gamma_0 \psi$$

\Rightarrow SM viola fortemente sia C che P

\hookrightarrow le interazioni EW sono diverse per fermioni con chiralità L e R.

$$CP: \quad \bar{\psi}_i \psi_j(t, \vec{x}) \rightarrow + \bar{\psi}_j \psi_i(t, -\vec{x}) \quad [S.29.5.7]$$

$$\bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_j(t, \vec{x}) \rightarrow - \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i(t, -\vec{x})$$

$$\bar{\psi}_i A \psi_j(t, \vec{x}) \rightarrow + \bar{\psi}_j A \psi_i(t, -\vec{x})$$

$$\bar{\psi}_i A \gamma_5 \psi_j(t, \vec{x}) \rightarrow - \bar{\psi}_j A \gamma_5 \psi_i(t, -\vec{x})$$

Dopo avere diagonalizzato gli Yukawa abbiamo:

$$\mathcal{L}_{(U)} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_L V W^+ d_L + \bar{d}_L V^+ W u_L \right)$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_L V W^+ \frac{1-\gamma_5}{2} d + \bar{d}_L V^+ W \frac{1-\gamma_5}{2} u \right)$$

$$\xrightarrow{CP} \frac{g}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^- \bar{d} V^T \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u + W_\mu^+ \bar{u} (V^+)^\dagger \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} d \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{CP \text{ e' conservato se } V = V^*}$$

Una fase non nulla nella matrice CKM
viola CP.

Dal punto di vista della matrice di Yukawa:

$$\mathcal{L}_{Yuk} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_L \gamma_0 u_R + \bar{u}_R \gamma_0^\dagger u_L \right)$$

$$= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{u} (\gamma_0 + \gamma_0^\dagger) u + \bar{u} (\gamma_0 - \gamma_0^\dagger) \gamma_5 u \right)$$

$$\stackrel{CP}{\hookrightarrow} -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{u} (\gamma_0^* + \gamma_0^T) u + \bar{u} (\gamma_0 - \gamma_0^T) \gamma_5 u \right)$$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ è invariante sotto CP se $\gamma_0 = \gamma_0^*$
(idem per quark down).

• Però questa non è una condizione invariante di base.

$$Y_d = U_L^d \hat{Y}_d U_R^{d\dagger} \quad Y_u = U_L^u \hat{Y}_u U_R^{u\dagger} \quad \hat{Y}_{d,u}: \text{diag.}$$

Senza perdere generalità ruotiamo i campi RH

$$d_R \rightarrow U_R^d U_L^{d\dagger} d_R \quad \text{e} \quad u_R \rightarrow U_R^u U_L^{u\dagger} u_R$$

In questa base Y_d e Y_u sono Hermitiane:

$$Y_d = U_L^d \hat{Y}_d U_L^{d\dagger} \quad Y_u = U_L^u \hat{Y}_u U_L^{u\dagger}$$

Se entrambe possono essere diagonalizzate in maniera SU(2)_L-invariante, $U_L^d = U_L^u \Rightarrow V_{CKM} = U_L^{u\dagger} U_L^d = \mathbb{1}$

\hookrightarrow No violazione di CP

Quindi la violazione di CP è descritta dal commutatore

$$-iC = [\gamma_u, \gamma_d] = \left[U_L^u \hat{\gamma}_u U_L^{u\dagger}, U_L^d \hat{\gamma}_d U_L^{d\dagger} \right] =$$

$$= U_L^u \left[\hat{\gamma}_u, V \hat{\gamma}_d V^\dagger \right] U_L^{u\dagger}$$

↳ C è una matrice Hermitiana a traccia nulla ($\gamma_{u,d}$ Hermit.)

Il $\det(C)$ è una quantità invariante di base:

$$\text{Im det } C = \frac{16}{\sqrt{6}} (m_t - m_c)(m_t - m_u)(m_c - m_u)(m_b - m_s)(m_b - m_d)(m_s - m_d) \mathcal{J}$$

dove $\mathcal{J} = \sum_{i,j,k,l} \text{Im}(V_{ij} V_{kl} V_{il}^* V_{kj}^*) = \mathcal{J} \sum_{\mu,\nu} \epsilon_{ik\mu} \epsilon_{j\ell\nu}$

INVARIANTE DI JARLSKOG $\mathcal{J} = S_{12} S_{23} S_{31} C_{12} C_{23} C_{31}^2 \sin \delta$

e.g. $\mathcal{J} = \text{Im}(V_{ud} V_{ub}^* V_{tb} V_{td}^*) = 2 \times \text{Area del triangolo di unitarietà (non riscalato)}$
 $\approx \lambda^6 A^2 \eta$

Wolfenstein Param.

Violazione di CP nel Modello Standard è proporzionale a $\text{Im det} [\gamma_u, \gamma_d]$

Dato che molte delle masse dei quark sono piccole $m \ll v$, gli effetti di CP sono piccoli anche se $\sin \delta \sim O(1)$. Anche soppressi da $S_{12} S_{31} S_{23} \sim O(\lambda^6)$.

- Se V è reale $\delta=0 \rightarrow \bar{\delta}=0 \rightarrow \text{No CP}$
- Se $m_u^i = m_u^j$ o $m_d^i = m_d^j$ ($i \neq j$) $\rightarrow \det C = 0 \rightarrow \text{No CP}$
(con due masse uguali possiamo ruotare la fase $\delta \rightarrow 0$)
- Ogni effetto di CP nello SM deve necessariamente coinvolgere tutte e 3 le generazioni,

MISURE DI ~~CP~~

[PDG 13]

- Scoperta di ~~CP~~ in decadimenti di K^0 [1964] e in decadimenti di mesoni B^0 [2001] e D^0 [2019]

Per poter essere sensibili ad effetti ~~CP~~ occorre essere sensibili alla fase δ della CKM.

\Rightarrow È necessaria l'interferenza fra due ampiezze (due diagrammi con dipendenza diversa dalla CKM)

FORMALISMO: VIOLAZIONE DI CP

La stessa descrizione si applica ai mesoni K^0, D^0, B^0, B_s^0
Le fenomenologie sono distinte a causa di parametri diversi: masse, decadimenti, elementi di CKM.

- Mesone neutro $M^0 \xrightarrow{CP} \bar{M}^0$

- Mesone carico $M \xrightarrow{CP} \bar{M}$

- Decadimento nello stato finale $f \xrightarrow{CP} \bar{f}$

MIXING TRA MESONI NEUTRI

Consideriamo lo stato iniziale al tempo $t=0$:

$$|\psi(0)\rangle = a(0) |M^0\rangle + b(0) |\bar{M}^0\rangle$$

Evolverà in t includendo tutti i possibili stati finali $\{f_1, f_2, \dots\}$:

$$|\psi(t)\rangle = a(t) |M^0\rangle + b(t) |\bar{M}^0\rangle + c_1(t) |f_1\rangle + c_2(t) |f_2\rangle + \dots$$

Se siamo interessati solamente agli stati M^0 e \bar{M}^0
e a tempi $t \gg t_{\text{ocs}} \rightarrow$ tempi tipici dell'interazione forte

L'evoluzione temporale per $|M^0\rangle$ e $|\bar{M}^0\rangle$ è descritta da un'Hamiltoniana 2×2 **NON-HERMITIANA**:

$$H = M - \frac{i}{2} \Gamma$$

$$\left. \begin{aligned} M &= M^\dagger \\ \Gamma &= \Gamma^\dagger \end{aligned} \right\} \text{Hermitiane}$$

M : termine **dispersivo** via stati intermedi off-shell

Γ : termine **assorbitivo** via stati intermedi on-shell

Assumendo invarianza sotto CPT: $H_{11} = H_{22}$ $\left\{ \begin{aligned} M_{11} &= M_{22} \\ \Gamma_{11} &= \Gamma_{22} \end{aligned} \right.$

In generale $\Rightarrow M - \frac{i}{2} \Gamma = \begin{pmatrix} A & P^2 \\ q^2 & A \end{pmatrix}$, $A, P^2, q^2 \in \mathbb{C}$

VIOLAZIONE DI CP NEI K [D.G. IX]

• Mescolamento $K^0 - \bar{K}^0$

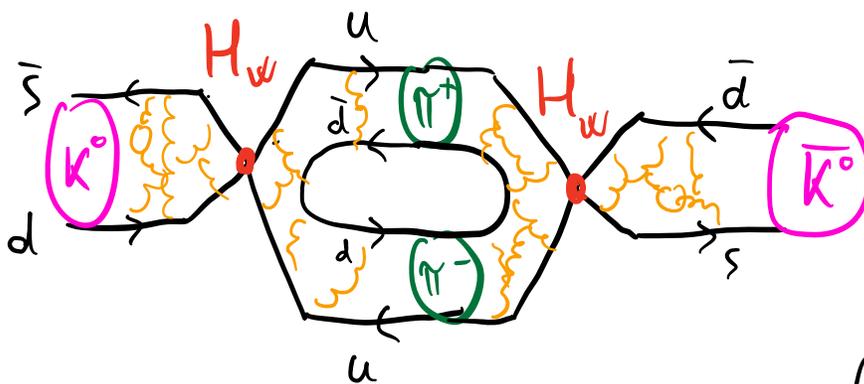
[hep-ph/961284]

K^0 e \bar{K}^0 hanno stessa carica elettrica e stessa massa (nell'ordine leading della Lagrangiana chirale).

⇒ Ci si aspetta che mescolino tra loro.

Ad esempio via il comune modo di decadimento $\pi^+\pi^0$

$$K^0 \leftrightarrow \pi^+\pi^- \leftrightarrow \bar{K}^0$$



Scriviamo lo stato generico $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) |K^0\rangle \\ b(t) |\bar{K}^0\rangle \end{pmatrix}$

$$\rightarrow i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (M - \frac{i}{2}\Gamma) |\psi(t)\rangle \quad \text{evoluzione temporale}$$

dove

$$[M - \frac{i}{2}\Gamma]_{ij} = \frac{\langle K_i^0 | H_{\text{eff}} | K_j^0 \rangle}{2m_K}$$

$\underbrace{\quad}_{|\Delta S|=2}$

$$= m_K^{(0)} \delta_{ij} + \frac{\langle K_i^0 | H_w | K_j^0 \rangle}{2m_K} + \frac{1}{2m_K} \sum_u \frac{\langle K_i^0 | H_w | u \rangle \langle u | H_w | K_j^0 \rangle}{m_K^0 - E_u + i\epsilon}$$

$\underbrace{\quad}_{|\Delta S|=1}$ $\underbrace{\quad}_{|\Delta S|=1}$

2° ordine in teoria delle perturbazioni nell'interazione H_w

La parte **assorbitiva** (Γ) si ottiene da

$$\frac{1}{\omega - E_n + i\epsilon} = P \left(\frac{1}{\omega - E_n} \right) - i\pi \delta(E_n - \omega)$$

Principal value ↘

→ Non zero solo per stati intermedi $|n\rangle$ fisici (on-shell)

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2M_K} \sum_n \langle K_i^0 | H_{\text{eff}} | n \rangle \langle n | H_{\text{eff}} | K_j^0 \rangle 2\pi \delta(E_n - M_K)$$

Abbiamo visto che in generale $M - \frac{i}{2}\Gamma = \begin{pmatrix} A & p^2 \\ q^2 & A \end{pmatrix}$, $A, p^2, q^2 \in \mathbb{C}$

Sotto CP: $CP |K^0\rangle = \varphi_K |\bar{K}^0\rangle$ con $|\varphi_K|^2 = 1$

Scegliamo per convenzione $\varphi_K = -1$

• Se CP fosse una simmetria: $(CP)H_{\text{eff}}(CP)^{-1} \stackrel{\text{se CP simmetria}}{=} H_{\text{eff}}$

$$2M_K p^2 = \langle K^0 | H_{\text{eff}} | \bar{K}^0 \rangle = \langle K^0 | CP^{-1} CP H_{\text{eff}} CP^{-1} CP | \bar{K}^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | H_{\text{eff}} | K^0 \rangle = q^2 2M_K$$

⇒ M_{12} e M_{21} sono reali

$$\rightarrow p^2 = q^2 \leftarrow$$

⇒ Gli autostati di CP sono anche autostati di massa:

$$|K_{\pm}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle \pm |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{AUTOSTATI DI CP: } CP|K_{\pm}^0\rangle = \pm |K_{\pm}^0\rangle$$

Invece, in generale $p \neq q$ e gli autostati di H_{eff} sono

$$|K_{L,S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} (p|K^0\rangle \pm q|\bar{K}^0\rangle), \quad \frac{p}{q} = \sqrt{\frac{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}}$$

AUTOSTATI DI MASSA

$$\left. \begin{aligned} CP|\pi^0\rangle &= -|\pi^0\rangle \\ CP|\pi^\pm\rangle &= -|\pi^\mp\rangle \end{aligned} \right\} \begin{aligned} CP|\pi^0\pi^0\rangle &= (-1)^2 (-1)^l |\pi^0\pi^0\rangle \\ l &= 0 \text{ perche' } \text{spin}(K^0) = 0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow CP|\pi^0\pi^0\rangle = +|\pi^0\pi^0\rangle$$

Analogamente per $|\pi^+\pi^-\rangle$. Quindi

$$CP|3\pi\rangle = (-1)^3 (-1)^l |3\pi\rangle \stackrel{l=0}{=} -|3\pi\rangle \rightarrow \begin{cases} CP(2\pi) = +1 \\ CP(3\pi) = -1 \end{cases}$$

Se CP fosse conservato (buona approssimazione dato che CP pica)

$$K_S = K^0_+ \rightarrow 2\pi, \quad K_L = K^0_- \rightarrow 3\pi \text{ esclusivamente.}$$

\rightarrow Il decadimento di K_L è soppresso dallo spazio delle fasi e quindi $\tau_L \gg \tau_S$: $\frac{\tau_L}{\tau_S} \approx 571$

$$\tau_S \approx 0.9 \times 10^{-10} \text{ s} \ll \tau_L \approx 0.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

Possiamo decomporre $|K_{S,L}\rangle$ in termini di $|K^\pm_0\rangle$

$$|K_{2,S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\bar{\epsilon}|^2}} \left(|K^0_+\rangle + \bar{\epsilon} |K^0_-\rangle \right), \quad \frac{P}{q} = \frac{1+\bar{\epsilon}}{1-\bar{\epsilon}}$$

$$\rightarrow \bar{\epsilon} = \frac{P-q}{P+q} \approx \frac{i}{2} \frac{\text{Im } M_{12} - \frac{i}{2} \text{Im } \Gamma_{12}}{\text{Re } M_{12} - \frac{i}{2} \text{Re } \Gamma_{12}} \approx \frac{1}{2} \frac{M_{12} - M_{21} - \frac{i}{2} (\Gamma_{12} - \Gamma_{21})}{m_L - m_S - \frac{i}{2} (\Gamma_L - \Gamma_S)}$$

Sperimentalmente, questo mixing si osserva dall'evoluzione temporale di uno stato prodotto a $t=0$ dall'interazione forte, quindi uno stato $|K^0\rangle$ o $|\bar{K}^0\rangle$.

A $t \neq 0$ possiamo sapere quanti $|K^0\rangle$ e $|\bar{K}^0\rangle$ ci sono andando ad osservare i decadimenti semileptonici

$$\left. \begin{array}{l} K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e \quad (\bar{s} \rightarrow \bar{u} e^+ \nu_e) \\ \bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e \quad (s \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{predizione dello SM:} \\ \Delta S = \Delta Q \end{array}$$

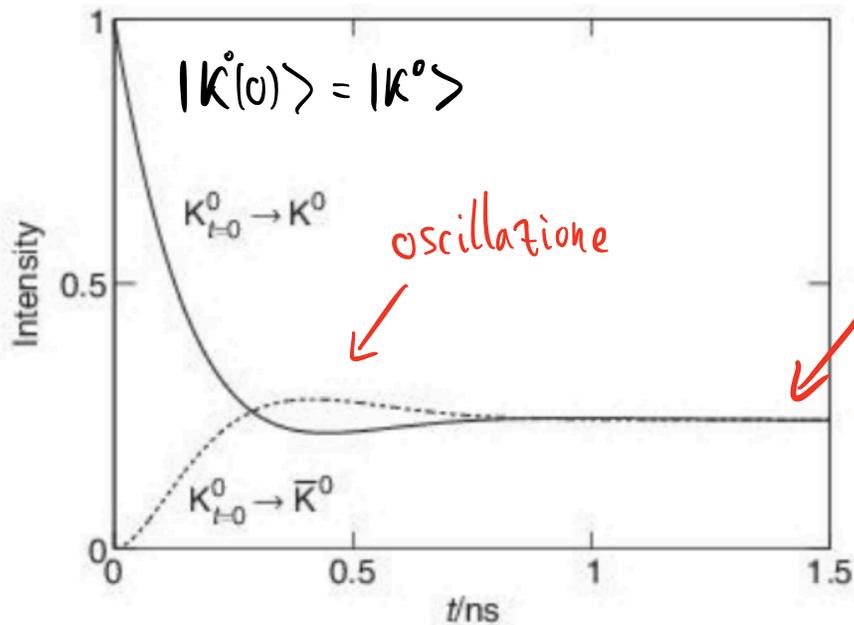
Per t generico, facendo evolvere gli autostati di H_{eff} :

$$t=0: |K^0\rangle \Rightarrow |K^0(t)\rangle = g_+(t) |K^0\rangle + \frac{q}{p} g_-(t) |\bar{K}^0\rangle$$

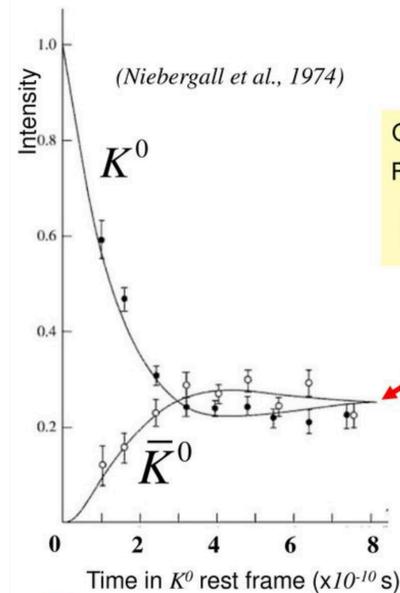
$$t=0: |\bar{K}^0\rangle \Rightarrow |\bar{K}^0(t)\rangle = \frac{p}{q} g_-(t) |K^0\rangle + g_+(t) |\bar{K}^0\rangle$$

$$\text{dove } g_{\pm}(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_{\pm}t} e^{-im_{\pm}t} \begin{pmatrix} 1 \pm e^{-\frac{1}{2}\Delta\Gamma t} & i\Delta m t \\ & e \end{pmatrix}$$

Definendo $\Delta M \equiv M_S - M_L > 0$ e $\Delta m \equiv m_L - m_S > 0$



dopo vari τ_S si rimane con uno stato di quasi solo $|K_L\rangle$

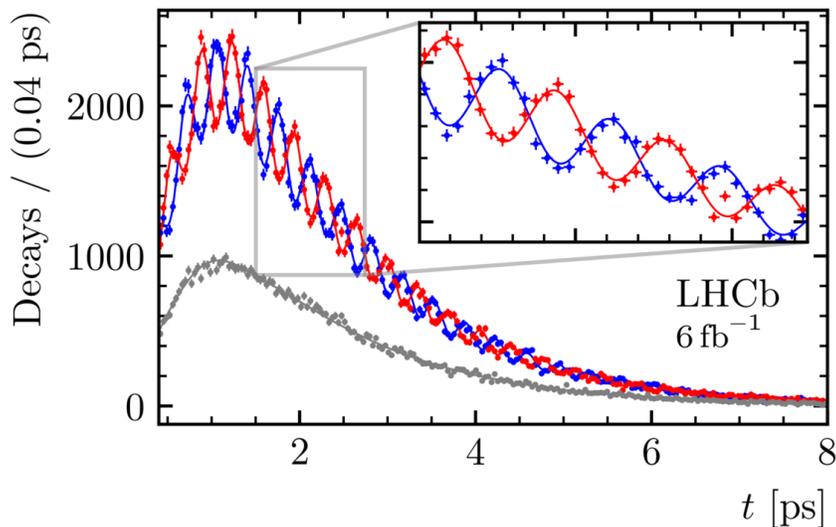


→ $\Delta M_{exp} = (3.484 \pm 0.006) \times 10^{-12} \text{ MeV}$

Situazione formalmente analoga avviene anche per altri mesoni neutri, ma con parametri diversi.

Per esempio il caso di $B_s^0 \leftrightarrow \bar{B}_s^0$ è spettacolare:

— $B_s^0 \rightarrow D_s^- \pi^+$ — $\bar{B}_s^0 \rightarrow D_s^- \pi^+$ — Untagged



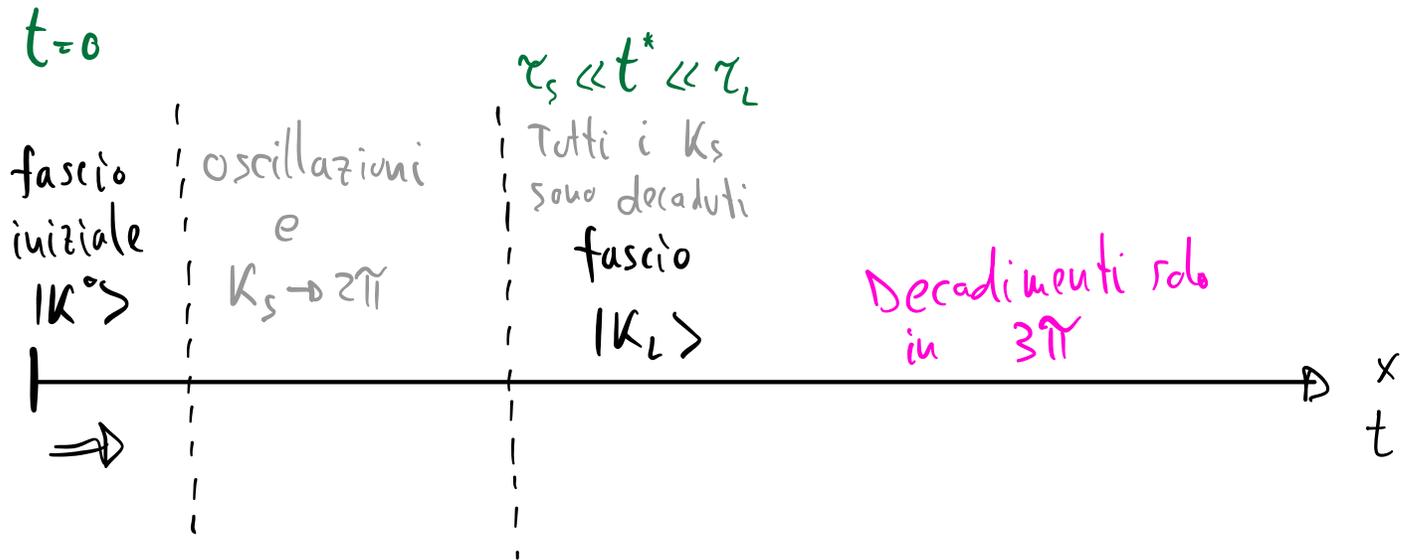
Al contrario dei K, per i B_s^0, \bar{B}_s^0 le vite medie dei 2 autostati di massa sono simili fra loro.

FENOMENOLOGIA DI VIOLAZIONE DI CP NEI KAONI

Se CP fosse conservato:

$$K_S = K_+^0 \rightarrow 2\pi, \quad K_L = K_-^0 \rightarrow 3\pi \text{ esclusivamente.}$$

Sperimentalmente avremmo:



Cronin e Fitch nel '64 fecero questo esperimento.

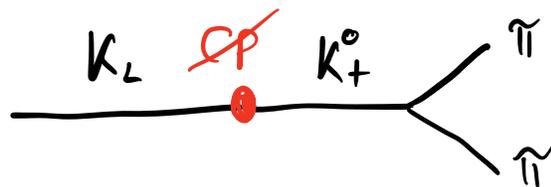
Osservarono decadimenti in 2π per $t \gg \tau_S$. Quindi $K_L \neq K_-^0$ ma ha anche una componente di K_+^0 :

$$|K_{2,S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\bar{\epsilon}|^2}} \left(|K_+^0\rangle + \bar{\epsilon} |K_-^0\rangle \right), \quad \frac{P}{q} = \frac{1+\bar{\epsilon}}{1-\bar{\epsilon}}$$

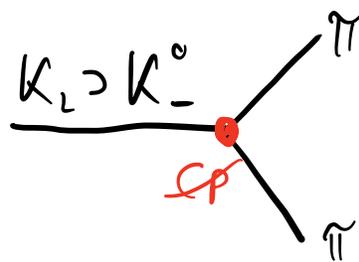
$$\rightarrow \bar{\epsilon} = \frac{P-q}{P+q} \approx \frac{i}{2} \frac{\text{Im } M_{12} - \frac{i}{2} \text{Im } \Gamma_{12}}{\text{Re } M_{12} - \frac{i}{2} \text{Re } \Gamma_{12}} \approx \frac{1}{2} \frac{M_{12} - M_{21} - \frac{i}{2} (\Gamma_{12} - \Gamma_{21})}{M_L - M_S - \frac{i}{2} (\Gamma_L - \Gamma_S)}$$

Questa violazione di CP può avvenire in 2 modi:

1) INDIRETTA: dal MISCOLAMENTO



2) DIRETTA: dal DECADIMENTO



Sotto $SU(2)_I$ isospin:

[DG. VIII-4]

$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$ hanno $I = 1$

$|\pi\pi\rangle$ ha $I = 0, 2$

$\vec{K} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$ ha $I = \frac{1}{2}$

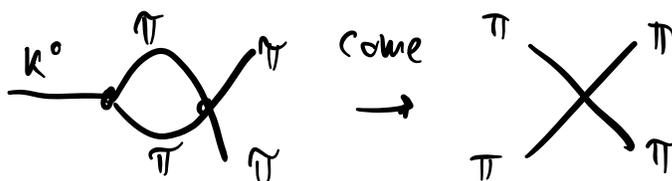
L'ampiezza $K^0 \rightarrow \pi\pi$ ha quindi $\Delta I = \frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$.

In termine di autostati di isospin definiamo:

$$A(K^0 \rightarrow (\pi\pi)_{I=0}) \equiv A_0 e^{i\delta_0} \quad A(K^0 \rightarrow (\pi\pi)_{I=2}) \equiv A_2 e^{i\delta_2}$$

δ_i : "fasi forti" di re-scattering $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$.

Vengono da:



partial wave amplitudes: $a_l(s)$
 $a_l(s) = e^{i\delta_l} \sin \delta_l(s)$

$$(\pi\pi)_{I=0} = \frac{\pi^0\pi^0 + \sqrt{2}\pi^+\pi^-}{\sqrt{3}} \quad (\pi\pi)_{I=2} = \frac{-\sqrt{2}\pi^0\pi^0 + \pi^+\pi^-}{\sqrt{3}}$$

Andando nella base fisica troviamo

$$A(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = A_0 e^{i\delta_0} + \frac{A_2}{\sqrt{2}} e^{i\delta_2}$$

$$A(K^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) = A_0 e^{i\delta_0} - \sqrt{2} A_2 e^{i\delta_2}$$

$$A(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0) = \frac{3}{2} A_2 e^{i\delta_2}$$

Le fasi forti vengono da QCD \Rightarrow invarianti di CP.

Quindi:

$$A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = A_0^* e^{i\delta_0} + \frac{A_2^*}{\sqrt{2}} e^{i\delta_2}$$

$$A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) = A_0^* e^{i\delta_0} - \sqrt{2} A_2^* e^{i\delta_2}$$

La fase di A_0 e A_2 invece è la "fase debole" che viola CP. Le δ_I si estraggono sperimentalmente dallo scattering $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$: $\delta_0 - \delta_2 \approx 44^\circ$

Da $K \rightarrow \pi\pi$ si misura: $\left| \frac{A_0}{A_2} \right| \approx 22.47$ "Regola $\Delta I = \frac{1}{2}$ "

L'ampiezza con $\Delta I = \frac{1}{2}$ contribuisce a A_0 e \Rightarrow di quella $\Delta I = \frac{3}{2} \rightarrow A_2$.

In caso di violazione diretta di CP, A_0 e $A_2 \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow A_0 \equiv |A_0| e^{i\varphi_0}, \quad A_2 \equiv |A_2| e^{i\varphi_2}$$

$$A(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = |A_0| e^{i\varphi_0} e^{i\delta_0} + \frac{|A_2|}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_2} e^{i\delta_2}$$

$$A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = -|A_0| e^{-i\varphi_0} e^{-i\delta_0} - \frac{|A_2|}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi_2} e^{-i\delta_2}$$

In termini di $K_{L,S}$ possiamo studiare gli effetti di violazione di CP da:

$$\frac{\langle \pi^+ \pi^- | H_w | K_L \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H_w | K_S \rangle} = \frac{A(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{A(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \equiv \eta_{+-} \equiv \varepsilon + \varepsilon'$$

$$\frac{\langle \pi^0 \pi^0 | H_w | K_L \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | H_w | K_S \rangle} = \frac{A(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{A(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0)} \equiv \eta_{00} \equiv \varepsilon - 2\varepsilon'$$

dove:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + i\varphi_0$$

$$\varepsilon' = i \frac{e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \left| \frac{A_2}{A_0} \right| \underbrace{\left(\varphi_2 - \varphi_0 \right)}_{\text{arg}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)} = i \frac{e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \left| \frac{A_2}{A_0} \right| \left(\frac{\text{Im } A_2}{\text{Re } A_2} - \frac{\text{Im } A_0}{\text{Re } A_0} \right)$$

Con alcune approssimazioni (vedi [Dt. IX-2])
 possiamo riscriverli come:

$$\varepsilon \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\text{Im } M_{12}}{\text{Re } M_{12}} + \frac{\text{Im } A_0}{\text{Re } A_0} \right) \leftarrow \text{CP indiretta}$$

$$\varepsilon' \approx \frac{i e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \omega \left(\frac{\text{Im } A_2}{\text{Re } A_2} - \frac{\text{Im } A_0}{\text{Re } A_0} \right) \leftarrow \text{CP diretta}, \quad \omega \equiv \frac{\text{Re } A_2}{\text{Re } A_0} \approx \frac{1}{22}$$

• ε nasce dall'interferenza tra l'ampiezza
 $K^0 \rightarrow \pi\pi$ e quella $K^0 \rightarrow \bar{K}^0 \rightarrow \pi\pi$ (mixing)

• ε' viene dall'interferenza tra gli stati finali con
 $I=0$ e $I=2$. $\varepsilon' \neq 0$ se $\arg\left(\frac{A_2}{A_0}\right) \neq 0$.

Da misure sperimentali:

$$\arg(\eta_{+-}) \approx \arg(\eta_{00}) \approx 43.5^\circ$$

$$|\varepsilon| \approx 2.23 \times 10^{-3}$$

$$\text{Re}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \approx 1.6 \times 10^{-3}$$

PREDIZIONE TEORICA NELLO SM

[DG. IX]
[hep-ph/9612284]

ΔM_K ed ϵ

Occorre calcolare

$$M_{12} = \frac{\langle K^0 | H_W | \bar{K}^0 \rangle}{2M_K}$$

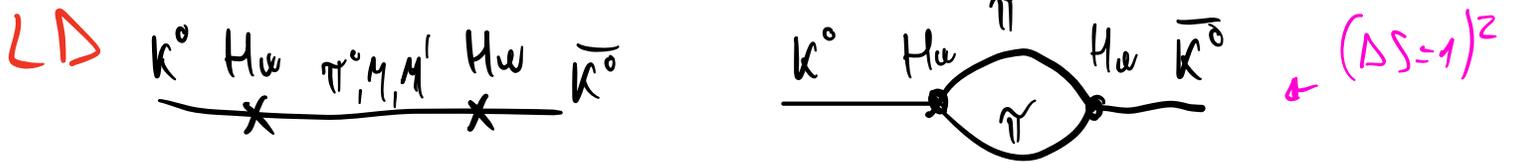
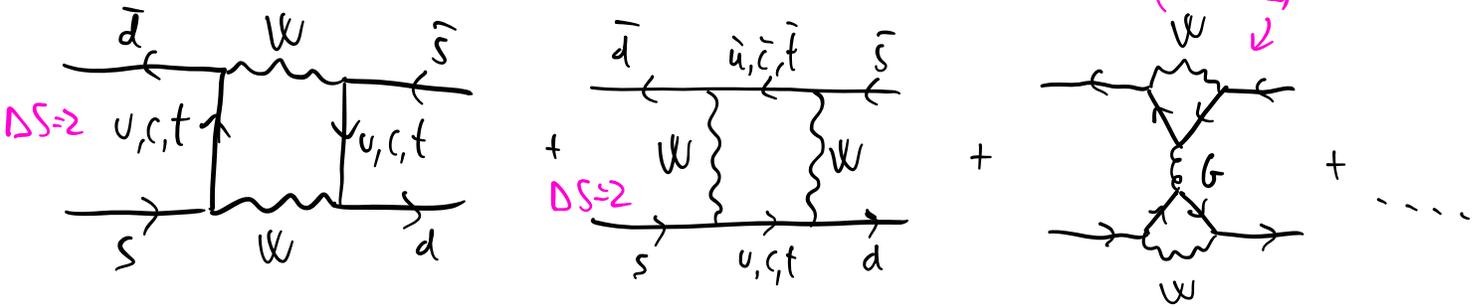
$$\Delta M \approx 2 \operatorname{Re} M_{12}$$

$$\epsilon \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\operatorname{Im} M_{12}}{\Delta M} + \frac{\operatorname{Im} A_0}{\operatorname{Re} A_0} \right)$$

contribuisce a ϵ'/ϵ : trascurabile

Ha contributi a CORTA DISTANZA e LUNGA DISTANZA:

SD Diagrammi nel Modello Standard



Il contributo LD è non perturbativo e si stima possa contribuire circa al $\sim 20\%$ del totale di ΔM_K .

Si calcola solamente con QCD su reticolo

ΔM_K è dominato dal contributo LD.

Sperimentalmente $\Delta M_K \approx -2 \Delta M_K$

In generale
abbiamo:

$$\Delta M_{SM} = \underbrace{\Delta M_{SD}}_{\Delta S=2} + \underbrace{\Delta M_{LD}}_{(\Delta S=1)^2}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{SD} + \mathcal{E}_{LD}$$

Dato che $|\mathcal{E}'| \ll |\mathcal{E}|$
e \mathcal{E}' viene da $\Delta S=1$,
 $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_{SD}^{\Delta S=2}$

• ΔM_{SD} e \mathcal{E}

H_W^{Box} è l'Hamiltoniana effettiva di bassa energia che
descrive quel diagramma una volta che gli stati pesanti
(c, t, W) sono integrati via:

Coefficiente di Wilson \downarrow ← operatore effettivo

$$H_W^{Box} = C(\mu) \mathcal{O}^{\Delta S=2}, \quad \text{dove } \mathcal{O}^{\Delta S=2} = (\bar{d} \gamma_\mu (1-\gamma_5) s)^2.$$

Dal calcolo dei diagrammi a box abbiamo

$$C(\mu) = \frac{G_F^2}{16\pi^2} b(\mu) \left[\sum_c \xi_c^2 H(x_c) W_c^2 \eta_{cc} + \sum_t \xi_t^2 H(x_t) W_t^2 \eta_{tt} + 2 \sum_c \xi_c \xi_t \bar{G}(x_c, x_t) W_c^2 \eta_{ct} \right]$$

- $G_F^2/16\pi^2$: 2° ordine in G_F e fattore di loop
- $\xi_i = V_{id}^* V_{is}$: fattore CKM. Il contributo up è rimosso con $V^t V_{t1}$
- $H(x_i), \bar{G}(x_i, x_j)$: funzioni di Inami-Lim, descrivono il loop

$$\hookrightarrow x_i \equiv m_i^2 / m_W^2$$

$$H(x) = \left[\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-x)^2} \right] - \frac{3}{2} \frac{x^2}{(1-x)^3} \ln x,$$

$$\bar{G}(x, y) = y \left[-\frac{1}{y-x} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4} \frac{1}{(1-x)^2} \right) \ln x \right. \\ \left. + (y \leftrightarrow x) - \frac{3}{4} \frac{1}{(1-x)(1-y)} \right].$$

Questo risultato include anche l'RG \bar{c} da $\mu = m_c$ a $\mu < m_c$.

- γ_{ij} : descrive correzioni perturbative di QCD.

$$\gamma_{cc}^{NNLO} = 1.87(76) \quad , \quad \gamma_{tt}^{NNLO} = 0,5765(65) \quad , \quad \gamma_{et}^{NNLO} = 0,496(47)$$

- $b(\mu)$: racchiude la dipendenza dalla scala di rinormalizzazione

$$b(\mu) = d_s(\mu)^{-2/\epsilon} \left[1 + \frac{d_s(\mu)}{4\pi} \left(\frac{\gamma^0 \beta^{(1)}}{2\beta_0^2} - \frac{\gamma^1}{2\beta^{(0)}} \right) \right] \rightarrow \text{contiene } \beta_{QCD} \text{ e dimensione anomala dell'operatore } \Delta S=2.$$

\Rightarrow Questa dipendenza da μ deve cancellarsi con quella dell'elemento di matrice adronico calcolato alla stessa scala.

ELEMENTO DI MATRICE ADRONICO

È non perturbativo, si calcola a scale $\mu < m_c$

Si può parametrizzare così:

$$\langle K^0 | O^{\Delta S=2}(\mu) | \bar{K}^0 \rangle = \frac{8}{3} f_K^2 m_K^2 B_K(\mu)$$

L'ampiezza fisica è INDIPENDENTE DA μ : il prodotto

$b(\mu) B_K(\mu) \equiv \hat{B}_K$ è costante.

Da QCD su reticolo si ha: $\hat{B}_K = 0.737(20)$.

Dalla parte reale di questo risultato possiamo calcolare.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta M_{SD} = (3.1 \pm 1.2) \times 10^{-15} \text{ GeV.}}$$

Consistente con la misura.

Da QCD su reticolo si ha: $\Delta M_{SM} = (7.7 \pm 2.7) \times 10^{-15} \text{ GeV}$
 [RBC-UKQCD '19]

Per ottenere $\varepsilon \simeq \varepsilon_{SD}^{\Delta S=2}$ ci serve $\varepsilon \simeq \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{Im } M_{12}^{\text{Box}}}{\Delta M_K}$

$$\Rightarrow |\varepsilon|_{SM} \simeq \frac{G_F^2}{6\sqrt{2}\pi^2} \frac{f_K^2 M_K \hat{B}_K \overbrace{A^2 \lambda^6 \bar{\eta}}^{\text{CKM}}}{\Delta M_K} \times$$

$$\times \left[H(x_c) M_c^2 \eta_{cc} + H(x_t) M_t^2 \eta_{tt} A^2 \lambda^4 (1 - \bar{\rho}) - \eta_{ct} M_c^2 \bar{G}(x_c, x_t) \right]$$

- Inserendo i vari input si trova un valore in accordo con la misura sperimentale.

oppure

- Possiamo usare la misura di $|\varepsilon|$ per estrarre informazione sul triangolo di unitarietà: $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$

• PREDIZIONE TEORICA DI ϵ' e $K \rightarrow \pi\pi$

[DG. VIII-3], [hep-ph/9612284]

ϵ' describe \mathcal{CP} diretta nei processi $\Delta S = 1$ come

$K \rightarrow \pi\pi$

$$\epsilon' \approx \frac{i e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \omega \left(\frac{\text{Im } A_2}{\text{Re } A_2} - \frac{\text{Im } A_0}{\text{Re } A_0} \right) \leftarrow \text{differenza di fase tra ampiezze } A_0 \text{ e } A_2.$$

$$= \frac{i e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{\text{Re } A_0} \left(\frac{1}{\omega} \text{Im } A_2 - \text{Im } A_0 \right), \quad \omega \equiv \frac{\text{Re } A_2}{\text{Re } A_0} \approx \frac{1}{22}$$

Tenendo conto della rottura di isospin si ha:

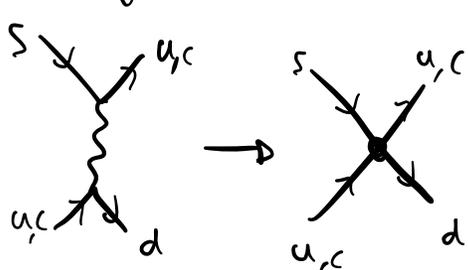
$$\epsilon' \approx \frac{i e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{\text{Re } A_0} \left(\frac{1}{\omega} \underbrace{\text{Im } A_2'}_{\text{fermione puro } \Delta I = \frac{3}{2}} - (1 - \Omega_{IB}) \underbrace{\text{Im } A_0}_{\text{fermione } \Delta I = \frac{1}{2}} \right)$$

$\Omega_{IB} \approx 0.25$

Queste ampiezze sono date da

$$\sqrt{\frac{3}{2}} A_I e^{i\delta_I} = \langle 2\pi, I | H_{\text{eff}}^{|\Delta S|=1} | K^0 \rangle = \underbrace{C_i(\mu)}_{\text{coeff. di Wilson}} \underbrace{\langle 2\pi, I | \mathcal{O}_i(\mu) | K^0 \rangle}_{\text{elemento di matrice}}$$

A livello albero abbiamo 2 operatori effettivi generati integrando via W :



$$H_{\text{eff}}^{|\Delta S|=1} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=u,c} \lambda_q (\bar{s}_i \gamma_\mu q_i) (\bar{q}_i \gamma^\mu d_i) + \text{h.c.}$$

$\lambda_q = V_{qs}^* V_{qd}$

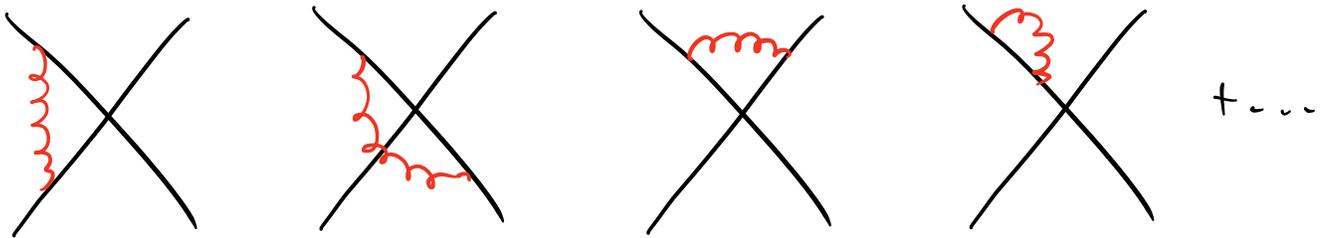
È conveniente riscriverla come:

$$M_{\text{eff}}^{|\text{DS}|=1} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=u,c} \lambda_q (O_q^+ + O_q^-) + \text{h.c.}$$

dove

$$O_q^\pm = \frac{1}{2} \left[(\bar{s}_L \gamma_\mu q_L) (\bar{q}_L \gamma^\mu d_L) \pm (\bar{s}_L \gamma_\mu d_L) (\bar{q}_L \gamma^\mu q_L) \right]$$

Correzioni di QCD sono però importanti:



Queste inducono divergenze UV che vanno rinormalizzate introducendo la scala di rinormalizzazione μ .

Il fatto che la combinazione $C_i(\mu) \langle \text{tr } O_i(\mu) | i \rangle$ sia indipendente da μ induce l'equazione di Callan-Symanzik:

$$\left[\delta_{ij} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_s(g_s) \frac{\partial}{\partial g_s} \right) - \gamma_{ij}^\top(g_s) \right] C_j(\mu) = 0$$

funz. β di QCD

$$\beta(g_s) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_s(\mu)$$

$$\gamma_{ij} = \hat{\gamma}_{ij} - 2 \gamma_5 \delta_{ij}$$

DIM. ANOMALA DEGLI OPERATORI EFFETTIVI

DIM. ANOMALA DELLA CORRENTE DEBOLE

La condizione iniziale a $\mu = M_w$ $C_i(M_w)$ è data dal MATCHING.

Considerando i diagrammi sopra abbiamo

$$\gamma_{ij} = \frac{g_s^2}{4\pi^2} \begin{bmatrix} \gamma_+ & 0 \\ 0 & \gamma_- \end{bmatrix} = \frac{g_s^2}{4\pi^2} \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\frac{g_s^2}{4\pi^2}} \right\} \begin{array}{l} \text{diagonale nella} \\ \text{base } O_q^\pm \end{array}$$

$$e \quad C_q^\pm(M_\omega) = \lambda_q \left(1 + O(g_s(M_\omega)) \right)$$

$$\Rightarrow H_{\text{eff}} \stackrel{|DS|=1}{\simeq} -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=u,c} \lambda_q \left\{ \left(1 - \frac{g_s^2(\mu)}{4\pi^2} \log \frac{M_\omega}{\mu} \right) O_q^+(\mu) + \left(1 + 2 \frac{g_s^2(\mu)}{4\pi^2} \log \frac{M_\omega}{\mu} \right) O_q^-(\mu) \right\} + \text{h.c.}$$

Questa è una buona approssimazione fino a $\mu \simeq m_c$

$\Rightarrow C_-$ aumenta $\rightarrow \Delta I = \frac{1}{2}$ comincia a spiegare la

C_+ decresce $\rightarrow \Delta I = \frac{3}{2}$ "regola $\Delta I = \frac{1}{2}$ " ma manca ancora un fattore ~ 5 .

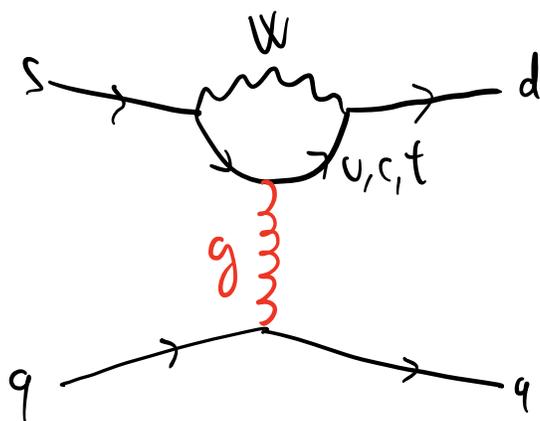
Scendendo sotto m_c $g_s(\mu)$ diventa non perturbativa e questo calcolo perde senso. \Rightarrow Occorre QCD su reticolo.

★ Questa Hamiltoniana non describe CP!

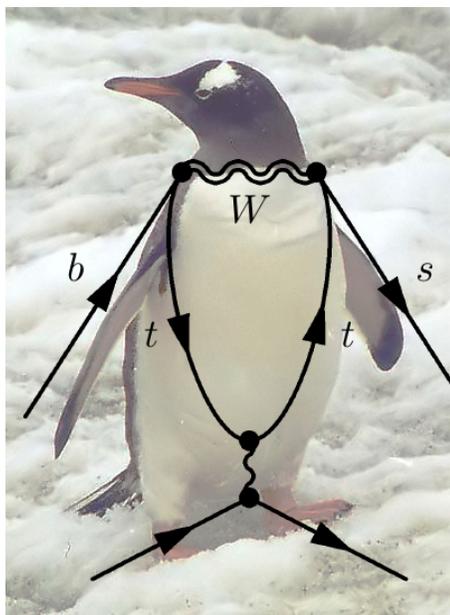
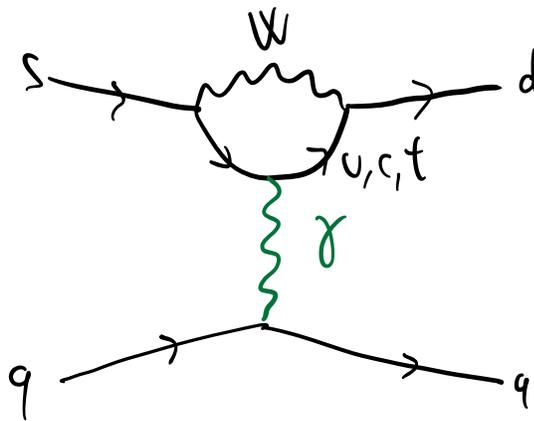
\Rightarrow Dobbiamo considerare altri diagrammi a loop dove entrano tutte e 3 le generazioni di quark, per essere sensibili alla fase CP.

I più importanti sono i **DIAGRAMMI A PINGUINO**

PINGUINO GLUONICO



PINGUINO ELETTRODEBOLE



Il nome fu coniato da John Ellis dopo aver perso una scommessa in un pub, nel '77.

Questi diagrammi sono soppressi dal meccanismo GIM (Glashow, Iliopoulos, Maiani): per $m_u = m_c = m_t = m_q$

la somma
$$\sum_{q=u,c,t} V_{qs}^* V_{qd} f(m_q) = f(m_q) \sum_{q=u,c,t} V_{qs}^* V_{qd} = 0$$

• Il pinguino gluonico contribuisce a $\Delta I = \frac{1}{2} \rightarrow$ ulteriore contributo.

Prima del gruppo di rinormalizzazione si ha:

$$H_w^{(peng)} \simeq -\frac{G_F \alpha_s}{12\pi\sqrt{2}} \left(V_{ud}^* V_{us} \log \frac{M_c^2}{M_R^2} + V_{td}^* V_{ts} \log \frac{M_t^2}{M_c^2} \right) (\bar{d}_L \gamma_\mu \lambda^A s_L) (\bar{q} \gamma_\mu \lambda^A q)$$

MATRICI GELL-MANN

$$H_w^{(ewp)} \simeq -\frac{G_F \alpha}{9\pi\sqrt{2}} \left(V_{ud}^* V_{us} \log \frac{M_c^2}{M_R^2} + V_{td}^* V_{ts} \log \frac{M_t^2}{M_c^2} \right) (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) Q_9 (\bar{q} \gamma_\mu q)$$

→ (valendo i coefficienti alla scala $\mu \simeq 1 \text{ GeV}$ si generano 8 operatori indipendenti $|\Delta S| = 1$ ($O_{1, \dots, 8}$))

Vedi [DG VIII-3] o [hep-ph/9611284] per dettagli

Per quanto riguarda i contributi a ϵ' :

- pinguino gluonico è il più grande e contribuisce ad A_0 (è puramente $\Delta I = \frac{1}{2}$).
- Il pinguino elettrodebole contribuisce sia a A_0 che A_2' . Anche se è più piccolo di A_0 , moltiplica $\omega^{-2} \simeq 22$.

$$\epsilon' \simeq \frac{i e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{\text{Re } A_0} \left(\frac{1}{\omega} \text{Im } A_2' - (1 - \Omega_{IB}) \text{Im } A_0 \right)$$

Numericamente, a $\mu = 2 \text{ GeV}$, si ha:

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} \simeq 2 \times 10^{-4} \left(\frac{\text{Im}(V_{td}^* V_{ts})}{1.4 \times 10^{-4}} \right) \left[2 \text{ GeV}^{-3} \langle \pi\pi, 0 | O_6 | K^0 \rangle (1 - \Omega_{IB}) \right. \\ \left. - 0.5 \text{ GeV}^{-3} \langle \pi\pi, 2 | O_8 | K^0 \rangle - 0.06 \right]$$

g-pinguino

δ-pinguino

Gli elementi di matrici adroniche vengono studiati in vari modi:

[Buras, 2703.12632]

1) teoria chirale, sfruttando il fatto che K e π sono pseudo-bosoni di Goldstone

$$\text{ChPT: } (\epsilon'/\epsilon)_{SM} = (14 \pm 5) \times 10^{-4}$$

2) modelli di QCD non perturbativa tipo "Dual QCD"

$$\text{DQCD } (\epsilon'/\epsilon)_{SM} = (5 \pm 2) \times 10^{-4}$$

3) QCD su reticolo.

$$\text{RBC-UKQCD } (\epsilon'/\epsilon)_{SM} = (21.7 \pm 8.4) \times 10^{-4}$$

$$\text{vs. } (\epsilon'/\epsilon)_{\text{exp}} = (16.6 \pm 2.3) \times 10^{-4}$$

⇒ In futuro, una predizione definitiva verrà ottenuta con simulazioni di QCD su reticolo sempre più precise.