29 Novembre

$$(x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\, x^{a-n} \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(x^m)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (m-j+1)\, x^{m-n} =$$

$$= m \cdot \ldots \cdot (m-n+1)\, x^{m-n}$$

In particolare, se $n \geq m+1 \Rightarrow (x^m)^{(n)} = 0$

Lemma Assegnamo $n+1$ costanti $a_0, \ldots, a_n$

$\exists$! unico polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ t.c.

$$\star \quad p^{(m)}(0) = a_m \quad \text{per ogni } m = 0, \ldots, n$$

è quello dato dalla formula $\displaystyle p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k$

Dim Dimostriamo che il nostro $p(x)$ soddisfa

$\star$

$$p^{(m)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k \right)^{(m)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(m)}$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(m)}$$

$$= \frac{a_m}{m!} (x^m)^{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(m)}$$

$$p^{(m)}(x) = \frac{a_m}{\cancel{m!}} \cancel{m!} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k}{k!} \prod_{j=1}^{m} (k-j+1)\, x^{\overbrace{k-m}^{>0}}$$

$$\boxed{p^{(m)}(0) = a_m} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k}{k!} \prod_{j=1}^{m} (k-j+1)\, \underbrace{0^{k-m}}_{=0}}_{0}$$

$\forall\ m = 0, \ldots, n$

Ora dimostriamo l'unicità. Il generico polinomio di grado $\leq n$ ha la forma

$$q(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

Dimostriamo che se $q^{(m)}(0) = a_m \quad \forall m = 0, \ldots, n$

allora $q(x) \equiv p(x)$.

Se riscrivo

$$q(x) = \frac{\alpha_n n!}{n!} x^n + \frac{\alpha_{n-1} (n-1)!}{(n-1)!} x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k k!}{k!} x^k$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k k!}{k!} x^k$$

Dal calcolo fatto sopra

$$q^{(m)}(0) = \alpha_m m! = a_m \qquad 0 \le m \le n$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_m = \frac{a_m}{m!}. \text{ Pertanto } q(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k = P(x)$$

Più in generale vale quanto segue

__Lemma__ Dati $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, c'è un unico polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ t.c.

$$p^{(m)}(x_0) = a_m \quad \text{per} \quad m = 0, \ldots, n$$

ed è dato dalla formula

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k$$

__Def__ Sia I un intervallo, $x_0 \in \mathring{I}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Supponiamo che f ammetta derivate fino all'ordine n in x_0. Allora il polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0 è il polinomio dato dalla formula

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

__Osservazione__ $p(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ t.c.

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per ogni } k = 0, \ldots, n.$$

__Osservazione__ Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$ li chiamiamo anche polinomi di McLaurin.

Esempio: Polinomi di McLaurin di e^x

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(e^x)^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$(e^x)^{(k)} = e^x$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

<u>Esempio</u> $\sin x$ $\qquad P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

$$P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

$$\sin^{(j)}(x) = \sin^{(r)}(x) \begin{cases} \sin x & r=0 \\ \cos x & r=1 \\ -\sin x & r=2 \\ -\cos x & r=3 \end{cases}$$

$j = \ell 4 + r$

$$\sin^{(j)}(0) = \sin^{(r)}(0) \begin{cases} 0 & r=0 \\ 1 & r=1 \\ 0 & r=2 \\ -1 & r=3 \end{cases}$$

per j pari $\quad \sin^{(j)}(0) = 0$

j dispari è della forma $\quad j = 2k+1 =$

se k è pari $\quad r = 1$

k dispari $\quad r = 3 \qquad j = 2k+1 = 2(2k_0+1)+1 = 4k_0+3$

$$\sin^{(j)}(0) = \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

$$P_{2n+1}(x) = P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ dispari}}}^{\overset{2n+1}{=}N} \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j =$$

$j = 2k+1$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Qui si ha $N = 2n+1$

$$\boxed{P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.}$$

In generale

$$P_{N+1}(x) = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(N+1)}(0) x^{N+1}}{(N+1)!}$$
$$= \boxed{P_N(x)} + \frac{f^{(N+1)}(0) x^{N+1}}{(N+1)!}$$

$P_{2n}(x)$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}_{P_{2n}(x)} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$P_{2n}(x) = P_{2n-1}(x) + \frac{\overbrace{\sin^{(2n)}(0)}^{0}}{(2n)!} x^{2n} = P_{2n-1}(x)$$

$\sin x$

$$\boxed{P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}} \quad \forall n \geq 0$$

$P_0(x) = 0 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = P_1(x) \qquad P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} = P_4(x)$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = P_6(x)$$

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$\cos x$

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$N = 2m$

$$P_N(x) = \sum_{j=0}^{2m} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{j=0}^{2m} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

$$\cos^{(j)}(x) = \cos^{(r)}(x)$$

	j mod 4	$x = 0$
$\cos x$	$r=0$	1
$-\sin$	$r=1$	0
$-\cos x$	$r=2$	-1
$\operatorname{sen} x$	$r=3$	0

$j = \ell 4 + r$

$j = 2k \qquad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = P_{2m}(x)$$

$$P_{2m+1}(x) = P_{2m}(x) + \cancel{\frac{\overbrace{\cos^{(2m+1)}(0)}^{0}}{(2m+1)!} x^{2m+1}}$$

$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = 1 \, , \quad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} = P_3(x)$

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = P_5(x)$$

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$