## Breve introduzione agli errori in una misura

Facendo una misura ci sono essenzialmente due tipi di errori che posso commettere:

- **Errori sistematici**: sono errori che commetto perche utilizzo uno strumento in modo errato, perché lo strumento è starato…. Sono errori che mi limitano l'accuratezza della misura, ovvero di quanto mi avvicino al valore vero. Possono essere molto difficili da individuare ma, se sono abile, posso annullarli.
  Esempio: Misuro una lunghezza con righello metallico che è stato tarato a 25°C ma sono in una stanza a -10°C.

- **Errori casuali**: sono errori dovuti all'imprecisione di uno strumento e della mia capacità di utilizzarlo. E' impossibile annullarli del tutto, posso solo limitarli il più possibile.
  Esempio: Misuro il tempo di caduta di un masso da una determinata altezza, avendo cura di non commettere errori sistematici…

Una grandezza può quindi essere misurata solo con una certa *incertezza*

Se ho una grandezza q a cui associo l'errore o incertezza $\delta q$, si definisce errore relativo il valore: $\frac{\delta q}{q}$

Dato un insieme di misure $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ di una certa grandezza $X$, si definisce

$$\bar{x} \equiv \frac{1}{N} \sum_i x_i$$ **valore medio**

Se non commetto errori sistematici, avrò che $\lim_{N \to \infty} \bar{x}$ è il valore vero $X$.

Per valutare la **precisione** della misura, devo quantificare quanto le $N$ misure fatte sono disperse.

$d_i = x_i - \bar{x}$ è la dispersione della misura i-esima

Però, $\sum d_i = 0$ per definizione di $\bar{x}$. Si introduce per questo il concetto di **deviazione standard** $\sigma$

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

per indicare una stima della dispersione di un set di misure.

In realtà, è più corretto definire la deviazione standard $\sigma$ come:

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$(N-1)$ tiene conto del fatto che per calcolare $\bar{x}$ ho "usato" una volta i dati, se lascio $(N)$ sottostimo l'errore.

Il caso estremo $N=1$ ci fa capire che la scelta $(N-1)$ è corretto:

Per $N=1$ $\quad \sigma_N$ diventa $\quad \sigma_N = \sqrt{\frac{1}{1}\, x_1-\bar{x}} = 0$ perché $\bar{x}=x_1$

che non ha senso, mi dice che ho errore 0 avendo fatto una sola misura.

Viceversa: $\quad \sigma_{N-1} = \sqrt{\infty \cdot 0}$ è indefinito, come giusto: se faccio una sola misura non so associare un valore alla dispersione di valori del set.

Generalmente, $N \gg$, così che $\frac{1}{N} \approx \frac{1}{N-1}$

La quantità $\sigma_x^2$ è detta varianza.

Si ha la seguente proprietà:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \frac{2\bar{x}\sum x_i}{N} + \frac{\sum \bar{x}^2}{N}$$

$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

La deviazione standard $\sigma_x$, per come è definita, è una buona rappresentazione dell'errore da associare alla grandezza $x$.

# LA DISTRIBUZIONE DI POISSON

Se ho un segnale dato da, ad esempio, il conteggio di eventi in un certo tempo $t$, quale errore devo associare alla misura? (esempio: sto contando il numero di elettroni fotoemessi ad una certa E...)

Supponiamo di avere $\lambda t$ eventi nel tempo $t$.

Divido $t$ in intervalli $\delta t$ così piccoli che non ho più di un evento che accade in $\delta t$

$\lambda \delta t$ sarà $\leq 1$ e mi definisce la probabilità di avere un evento in $\delta t$

$$P(1; \delta t) = \lambda \delta t$$

Quindi, la probabilità di avere 0 eventi in $\delta t$:

$$P(0; \delta t) = 1 - \lambda \delta t$$

Supponiamo ora di conoscere $P(0;t)$, la probabilità che a $t$ non abbia ancora misurato eventi.
Potrei chiedermi quanto vale $P(0, t+\delta t)$:

$$P(0; t+\delta t) = P(0;t)\,(1-\lambda\,\delta t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{P(0; t+\delta t) - P(0;t)}{\delta t} = -\lambda P(0;t)$$

$$\frac{d P(0;t)}{dt} = -\lambda\, P(0;t)$$

$$P(0;t) = C e^{-\lambda t}$$

Siccome voglio che $P(0,0) = 1 \Rightarrow C = 1$

$$P(0,t) = e^{-\lambda t}$$

Analogamente, posso esprimere la probabilità di avere n eventi al tempo $t+\delta t$.

$$P(n, t+\delta t) = P(n,t)(1-\lambda\delta t) + P(n-1; t)\lambda\delta t$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}P(n;t) + \lambda P(n;t) = \lambda P(n-1;t)$$

trucco: introduco la funzione $\mu(t) = e^{\lambda t}$, moltiplico a dx e sx per questa funzione e scopro che:

$$\mu(t)\left(\frac{d}{dt}P(n;t) + \lambda P(n;t)\right) = \frac{d}{dt}\left[\mu(t)P(n;t)\right]$$

metodo del FATTORE DI INTEGRAZIONE

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P(n;t)\right] = e^{\lambda t}\lambda P(n-1;t)$$

Ad esempio, per $n=1$ :

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t} P(n,t)\right] = \lambda e^{\lambda t} P(0,t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda$$

$$\Big\downarrow \text{integro}$$

$$e^{\lambda t} P(1,t) = \lambda t + C$$

Voglio che $P(1,0)=0 \Rightarrow C=0$

$$P(1,t) = \lambda t \, e^{-\lambda t}$$

**Principio di induzione:** Se ho $P(0)$ e $P(n) \to P(n+1)$ allora $P(n)$ ok per ogni $n$

Con il metodo usato per trovare $P(1)$ posso dedurre

$$P(n;t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Vediamo che $P(n;t) \Rightarrow P(n+1;t)$ :

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t} P(n+1;t)\right] = e^{\lambda t} \lambda P(n;t) = e^{\lambda t} \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda (\lambda t)^n}{n!}$$

$\downarrow$ integro

$$e^{\lambda t} P(n+1;t) = \int \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} dt = \frac{\lambda}{n!} \frac{1}{(n+1)\lambda} (\lambda t)^{n+1} + C$$

$$= \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + C$$

Ovvero:

$$P(n+1;t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(dove $C=0$ perché voglio che $P(n+1;0)=0$)

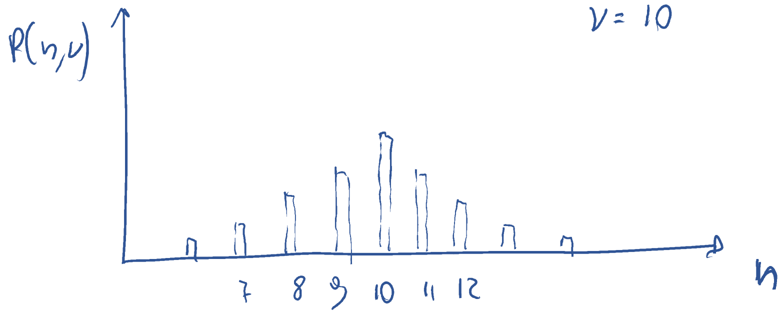
$\rightarrow$ OK, ha la stessa forma di $P(n;t)$

Ora definisco $\lambda t = \nu$

$$\Rightarrow \boxed{P(n;\nu) = \frac{\nu^n}{n!}\,e^{-\nu}}$$

distribuzione di Poisson

Mi dà la probabilità di avere $n$ eventi nell'intervallo in cui mediamente ho $\nu$ eventi ......




**Proprietà:**

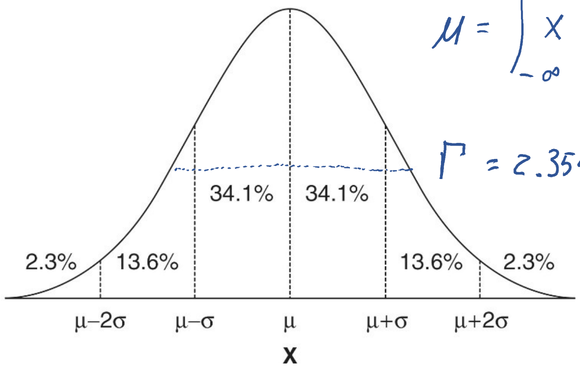
$$\langle n \rangle = \sum n\,P(n) = \nu$$

$$\sigma = \sqrt{\nu}$$

## DISTRIBUZIONE NORMALE o GAUSSIANA

Nel caso in cui io commetta solo errori random, mi aspetto che la distribuzione dei valori che misuro segua una curva gaussiana:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$




$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$$

$\Gamma = 2.354\sigma$ larghezza a metà altezza

Se faccio una misura,

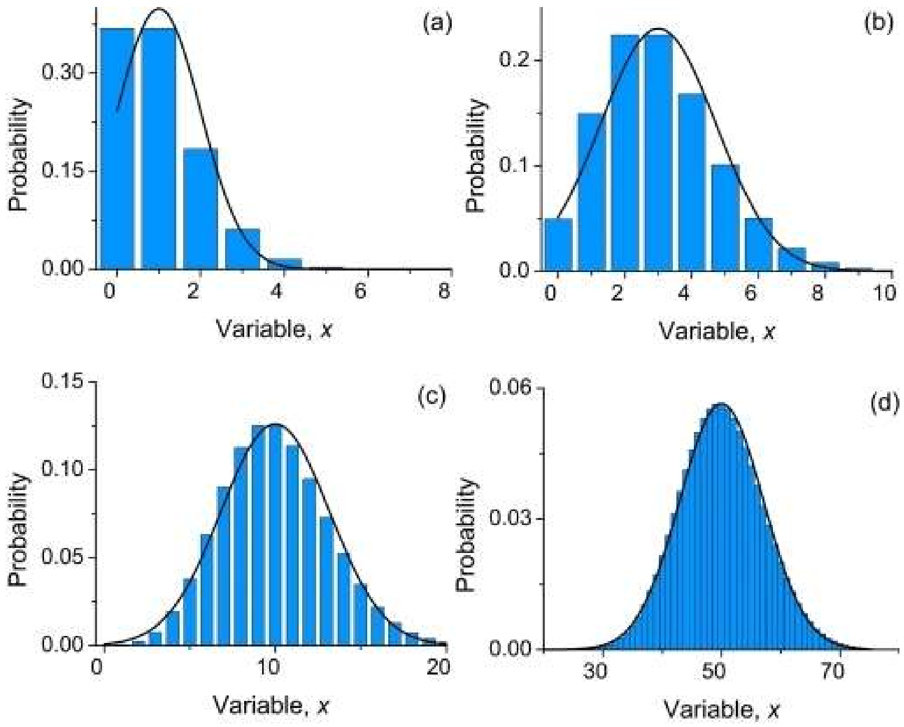
$p(x)\,dx$ mi dà la probabilità di trovare un valore in un intervallo $dx$ attorno a $x$.

La deviazione standard: $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, p(x)\, dx = \sigma^2$

Ho il 68% di probabilità di misurare un valore entro $1\sigma$ da $\mu$

95% $2\sigma$

Per $\nu \gtrsim 20-30$, il profilo di Poisson è praticamente sovrapponibile ad una gaussiana



# PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Supponiamo di avere una grandezza ottenuta come funzione di grandezze che ho misurato. $q = q(x, y)$

Che errore associo a $q$, conoscendo gli errori su $x$ e $y$?

Supponiamo di aver fatto $N$ misure di $x$ e di $y$. Potremo calcolarci gli $N$ valori di $q$: $q_i = q(x_i, y_i)$

Se assumo che i valori $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ siano tutti molto vicini ai valori medi $\bar{x}$ e $\bar{y}$, potrò scrivere:

$$q_i = q(x_i, y_i) \approx q(\bar{x}, \bar{y}) + \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x}}(x_i - \bar{x}) + \underbrace{\frac{\partial q}{\partial y}}_{\text{derivate calcolate in } \bar{x}, \bar{y}}(y_i - \bar{y})$$

ovvero, faccio uno sviluppo in serie di $q(x, y)$.....

Ma, applicando la definizione di valore medio:

$$\boxed{\bar{q}} = \frac{1}{N} \sum q_i = \frac{1}{N} \sum \left( q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot N\, q(\bar{x}, \bar{y}) = \boxed{q(\bar{x}, \bar{y})}$$

Cioè, il valore medio di $q$ è $q$ calcolata per i valori medi di $x$ e $y$

Possiamo ora calcolare la deviazione standard di $q$:

dalla pagina precedente:

$$q_i - \bar{q} = \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y})$$

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{N}\sum (q_i - \bar{q})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y})\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2}_{\sigma_x^2} + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{N}\sum (y_i - \bar{y})^2}_{\sigma_y^2} + 2\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}\underbrace{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}_{\equiv \sigma_{xy}}$$

$\equiv \sigma_{xy}$ è chiamata covarianza di $x$ e $y$

Se $x$ e $y$ sono indipendenti, è intuitivo che $\sigma_{xy} \to 0$ (non c'è correlazione tra errori in $x$ e in $y$)

$$\boxed{\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}$$

Esempi:

$\boxed{\text{SOMMA}}$

$$q = x + y$$

$$\sigma_q^2 = \sigma_x^2 \underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2}_{=1} + \sigma_y^2 \underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2}_{=1} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Esempio: $E_{binding} = E_{h\nu} - E_{kin} - \phi$

$$\downarrow$$

$$\sigma_{E_b} = \sqrt{\sigma_{E_{kin}}^2 + \sigma_{E_b}^2 + \underbrace{\sigma_\phi^2}_{\approx 0}}$$

$\boxed{\text{PRODOTTO}}$

$$q = x \cdot y$$

$$\sigma_q^2 = \sigma_x^2 y^2 + \sigma_y^2 x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sigma_q^2}{q^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$$

# Propagazione degli errori

$$x = au + bv \qquad \sigma_x^2 = a^2\sigma_u^2 + b^2\sigma_v^2 + 2ab\sigma_{uv}^2$$

$$x = auv \qquad \frac{\sigma_x^2}{x^2} = \frac{\sigma_u^2}{u^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2} + 2\frac{\sigma_{uv}^2}{uv}$$

$$x = \frac{au}{v} \qquad \frac{\sigma_x^2}{x^2} = \frac{\sigma_u^2}{u^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2} - 2\frac{\sigma_{uv}^2}{uv}$$

$$x = au^b \qquad \frac{\sigma_x}{x} = b\frac{\sigma_u}{u}$$

$$x = ae^{bu} \qquad \frac{\sigma_x}{x} = b\sigma_u$$

$$x = a^{bu} \qquad \frac{\sigma_x}{x} = (b \ln a)\sigma_u$$

$$x = a\ln(bu) \qquad \sigma_x = ab\frac{\sigma_u}{u}$$

$$x = a\cos(bu) \qquad \sigma_x = -\sigma_u ab \sin(bu)$$

$$x = a\sin(bu) \qquad \sigma_x = \sigma_u ab \cos(bu)$$