Soluzioni del tema del 7 luglio 2022.

1\. a) $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ con $w_1 = (1,1,1,2)$
$\cap$
$\mathbb{R}^4$ $w_2 = (3,0,0,-1)$

Poiché w_1, w_2 non sono proporzionali, $\dim W = 2$.

$U: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ U è lo spazio delle soluzioni di

un sistema lineare omogeneo in 4 incognite di rango 2, perciò $\dim U = 4 - 2 = 2$.

Per trovare una base di U risolviamo il sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(*) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ $x_2 = x_4$

$x_1 = 2x_2 + 2x_3 = 2x_3 + 2x_4$

Soluzione generale: $(2x_3 + 2x_4, x_4, x_3, x_4) =$

$= x_3(2,0,1,0) + x_4(2,1,0,1)$.

Una base di U è formata da $u_1 = (2,0,1,0)$ e $u_2 = (2,1,0,1)$.

b) $U+W$ è generato da w_1, w_2, u_1, u_2. Per calcolare la sua dimensione, cerchiamo il rango della matrice A che ha nelle colonne questi 4 vettori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il rango è 3, dunque $\dim(U+W) = 3$; per Grassmann allora $\dim(U \cap W) = 1$.

Una base di $U+W$ è formata da 3 colonne linearmente indipendenti di A, per esempio le prime 3. Per trovare una base di $U \cap W$, osservo che i vettori di $U \cap W$ sono quelli che si possono scrivere come combinazione lineare di w_1 e w_2 e che soddisfano le 2 equazioni di U (*):

$$\lambda(1,1,1,2)+\mu(3,0,0,-1)=(\lambda+3\mu,\lambda,\lambda,2\lambda-\mu)$$

$$\begin{cases} -(\lambda+3\mu)+2\lambda+2\lambda=0 \\ -\lambda+2\lambda-\mu=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3\lambda-3\mu=0 \\ \lambda=\mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)=\lambda(4,1,1,1).$$

Il vettore $(4,1,1,1)$ costituisce una base di $U\cap W$.

2. $$\begin{cases} x+2y+2w+z=1 \\ y+2w+z=0 \\ x+y+\lambda w=0 \\ \lambda y+2\lambda w+\lambda^2 z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2\lambda & \lambda^2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2\lambda & \lambda^2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Bisogna distinguere i casi $\lambda=0$, $\lambda\neq 0$

Se $\lambda \neq 0$, λ è il terzo pivot:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \end{array}\right)$$

Se $\lambda \neq 1$, le 2 matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango 4, dunque il sistema è compatibile e ha una e una sola soluzione.

Se $\lambda = 1$, l'ultima riga è nulla, le 2 matrici hanno entrambe rango 3, dunque il sistema è compatibile e lo spazio delle soluzioni è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1.

Se $\lambda = 0$, la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dunque le 2 matrici completa e incompleta hanno ranghi diversi e il sistema non è compatibile.

Risolviamo il sistema nel caso $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + 2y + 2w + z = 1 \\ y + 2w + z = 0 \\ w = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

z è parametro libero e

$w = -1$

$y = -2w - z = 2 - z$

$x = -2y - 2w - z + 1 = -2(2-z) + 2 - z + 1$

$= z - 1$.

La soluzione generale è $(z-1, 2-z, -1, z) =$

$= (-1, 2, -1, 0) + z(1, -1, 0, 1)$.

3. $f = L(A)$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & -1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = -x(x-3)^2$

Ci sono 2 autovalori distinti:

$\lambda_1 = 0$ con $m_a(0) = 1 = m_g(0)$;

$\lambda_2 = 3$ con $m_a(3) = 2$.

Calcoliamo $m_g(3) = \dim \mathrm{Aut}(3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Le 3 righe sono proporzionali, quindi la matrice ha rango 1, e perciò $\dim \mathrm{Aut}(3) = 3 - 1 = 2$. Quindi A è diagonalizzabile.

b) $\mathrm{Aut}(3)$ è def. da $x - y - z = 0$,

ossia $x = y + z$; la soluzione generale è

$(y+z, y, z) = y(1,1,0) + z(1,0,1)$. Una base di $\mathrm{Aut}(3)$ è $\underset{\overset{\shortparallel}{v_1}}{(1,1,0)}, \underset{\overset{\shortparallel}{v_2}}{(1,0,1)}$.

$\mathrm{Aut}(0)$ è definito da

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y = z \\ 2x = -y - z \end{cases} \quad x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -z$$

$(-z, z, z) = z(-1, 1, 1)$.

Il vettore $(-1,1,1)^{= v_3}$ forma una base di $\mathrm{Aut}(0)$.

c) Poiché A è simmetrica, per il Teorema spettrale esiste una base ortonormale di

autovettori. Osserviamo che v_1 e v_3 sono ortogonali, come pure v_2 e v_3.
Normalizziamo v_1 $\Rightarrow$ $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Con Gram-Schmidt ortonormalizziamo la base u_1, v_2 di $Aut(3)$: $\bar{u}_2 = (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) =$

$= (1,0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Ora lo normalizziamo: $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Infine $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

4. $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Det}(M) = -12 + 8 + 6 - 6 + 8 - 12 = -8$.

Perché si possa avere $\det(MN) = 4$, dal momento che $\det(MN) = \det(M)\det(N)$, per Binet, si deve avere $\det(N) = \frac{4}{\det(M)} = -\frac{1}{2}$.

Inoltre qualunque matrice 3x3 di determinante $-\frac{1}{2}$ andrà bene. Per esempio si può prendere

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$