

23 Nov pomeriggio $a \in \mathbb{R}$

$$\binom{a}{k} = ?$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots \overbrace{(n-k+1)}^{(n-k)!}}{k! \cancel{(n-k)!}} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (n-j)}{k!}$$

$\binom{a}{0} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1$

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & \text{u } k=0 \\ \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (a-j)}{k!} & \text{u } k \geq 1 \end{cases}$$

Lemma I polinomi di McLaurin di $(1+x)^a \doteq f(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k$$

Dim

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$f^{(0)}(0) = f(0) = (1+0)^a = 1$$

$$0! = 1 \quad \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1 = \binom{a}{0}$$

$$f^{(k)}(x) = ((1+x)^a)^{(k)} = \prod_{j=1}^k (a-j+1) (1+x)^{a-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \prod_{j=1}^k (a-j+1)$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\prod_{j=1}^k (a-j+1)}{k!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (a-j)}{k!} = \binom{a}{k}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$$\binom{a}{1} = a = \frac{\prod_{j=0}^0 (a-j)}{1!} = \frac{a}{1!} = a$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = \frac{\prod_{j=0}^1 (\frac{1}{2}-j)}{2!} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8}$$

Teor (Lagrange) $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$,
 supponiamo che $f^{(n+1)}(x)$ esista $\forall x \in (a,b)$. Allora

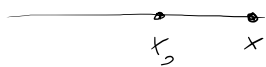
Se scriviamo $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, con

$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ (polin. di Taylor di ordine n di f nel punto x_0) risulta che $R_n(x_0) = 0$

mentre se $x \neq x_0$ si ha

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

dove c_{nx} è un opportuno punto dell'intervallo aperto di estremi x_0 e x .



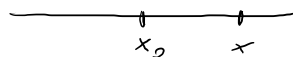
$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

osservazione

Per il caso $n=0$ questo ci dà esattamente il teorema di Lagrange. Infatti dato $x_0, x \in (a,b)$

e dato f differenziabile in (a,b) , se ad esempio $x_0 < x$ allora $f \in C^0([x_0, x])$,



f' è definita in (x_0, x) , allora $\exists c_x \in (x_0, x)$ dove

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{Risolvendo l'uguaglianza}$$

rispetto ad $f(x)$ otteniamo

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c_x)(x-x_0)}_{R_0(x)}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Esempio e è irrazionale. Approssimare e con un numero razionale con un errore $< 10^{-3}$.

e^x

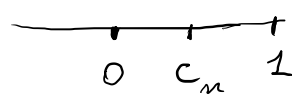
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$$

$$e^x = P_n(x) + R_n(x) \quad x=1$$

$$e = P_n(1) + R_n(1)$$

$$0 < R_n(1) = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$



Si cerca un n , basso, tale che

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow (n+1)! > 3000$$

$$(n+1)! = \begin{cases} 2 < 3000 & n=1 \\ 6 < 3000 & n=2 \\ 24 < 3000 & n=3 \\ 120 < 3000 & n=4 \\ 720 < 3000 & n=5 \\ \boxed{5040 > 3000} & n=6 \end{cases}$$

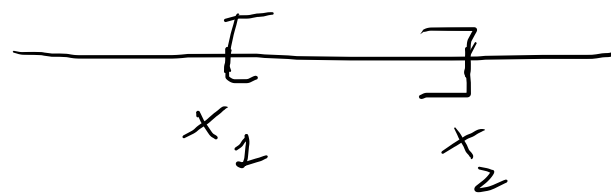
$n=6$ ✓
 $P_6(1)$

Esercizio Se $f \in C^0(I)$ e f' esiste in $\overset{\circ}{I}$ e se
 $f'(x) \geq 0$ allora $f(x)$ è una funzione crescente.

Si tratta di dimostrare che per ogni coppia $x_1 < x_2$ in I

si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$. Infatti $\underline{[x_1, x_2]} \subseteq I$

e $(x_1, x_2) \subseteq \overset{\circ}{I}$



Se restringiamo f ad $[x_1, x_2]$, si ha $f \in C^0([x_1, x_2])$

e f' esiste dappertutto in (x_1, x_2) . Posso applicare

l'lemma e concludere che $\exists c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$\overset{(<)}{0} \leq f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \overset{(>)}{\geq} 0$$
$$\Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2)$$

Esercizio Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ ed $f'(x) \geq 0$ $\forall x \notin X$ allora

$f(x)$ è crescente.

(strettamente crescente)

Supponiamo $x_1 < \dots < x_n$

Siano $a < b$. Voglio dimostrare $f(a) \leq f(b)$.

Se $(a, b) \cap X = \emptyset$ allora $f \in C^0([a, b])$ e

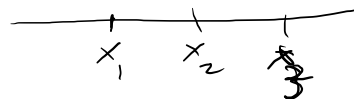
f' è definito in (a, b) ,



posso applicare Lagrange e concludere

che $\exists c \in (a, b)$ t.c. $0 \leq f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

Da qui concludo che $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$



Più in generale se $a < b$ ci sono degli elementi di X contenuti in (a, b)



$$f(a) \leq f(x_{k_0}) \leq f(x_{k_0+1}) \leq \dots \leq f(x_{k_0+m_0}) \leq f(b)$$

