Soluzioni del tema del 6/9/2022.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Il sistema è omogeneo perciò è certamente compatibile. L'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^5 di dimensione $5 - rg(A)$ dove A è la matrice dei coefficienti. Poiché $rg(A) = 3$, detto W lo spazio delle soluzioni, si ha $\dim W = 2$. Cerchiamo una sua base. Il sistema ridotto a gradini è

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

quindi x_5, x_5 sono le variabili libere. La soluzione generale:

$x_3 = x_4 - x_5$

$x_2 = \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_4 = \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} x_5 - \frac{1}{2} x_4 = -\frac{1}{2} x_5$

$x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = \frac{1}{2} x_5 + x_4 - x_5 - x_4 + x_5 = \frac{1}{2} x_5$

$\Rightarrow$ soluzione generale $(\frac{1}{2} x_5, -\frac{1}{2} x_5, x_4 - x_5, x_4, x_5) =$

$x_4 \underbrace{(0, 0, 1, 1, 0)}_{w_1} + x_5 \underbrace{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 0, 1)}_{w_2} = x_4 w_1 + x_5 w_2.$

w_1, w_2 formano una base di W.

2. $A_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \mu & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(A_\mu) = 4 - 2\mu + 2 - \mu + 2 - 8 = -3\mu$

perciò A_μ è invertibile se e solo se $\mu \neq 0$.

In particolare A_2 è invertibile.

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $\det(A_2) = -6$.

$$A_2^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -12 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Una combinazione lineare nulla delle righe di A_0 è del tipo

$\lambda(1,1,1) + \mu(2,1,-2) + \nu(0,1,4) = 0$, ossia

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda - 2\mu + 4\nu = 0 \end{cases}$$ da cui $\lambda = 2$, $\mu = -1$, $\nu = -1$ (si ottiene risolvendo il sistema).

3. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

non è altro che $L(A)$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inoltre $A = M_{\mathcal{E}}(L(A)) = M_{\mathcal{E}} f$ dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$$p_f(x) = p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3$$

c'è solo l'autovalore $\lambda = 1$ con $m_a(1) = 3$.

$\mathrm{Aut}(1) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, perciò

$\dim \mathrm{Aut}(1) = 3 - 2 = 1 = m_g(1)$: f non è diagonalizzabile. Una base di $\mathrm{Aut}(1)$ si trova risolvendo il sistema $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ quindi è $(1,0,0) = e_1$.

4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica, perciò

L(M) è autoaggiunto, quindi è diagonalizzabile mediante una base ortonormale di autovettori, per il teorema spettrale.

$$p_M(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 2 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 2 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^2(2-x) - 4(2-x) =$$

$$= (2-x)(x^2-4) = (2-x)(x-2)(x+2) =$$

$$= -(x-2)^2(x+2).$$ ci sono 2 autovalori:

$\lambda_1 = 2$ con $m_a(2) = 2$,

$\lambda_2 = -2$ con $m_a(-2) = 1$.

$$\mathrm{Aut}(2): \quad M - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$x_1 - x_3 = 0$ $\Rightarrow$ una base è data da $(1,0,1), (0,1,0)$: sono ortogonali.

$$\mathrm{Aut}(-2): \quad M + 2E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$ una base è $(1,0,-1)$.

una base ortonormale si ottiene normalizzando questi 3 vettori: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $(0,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

una matrice diagonale simile a M è

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

. una matrice ortogonale S tale che $S^{-1} M S = D$ deve avere nelle colonne una base ortonormale di autovettori, perciò

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$