Soluzioni del tema del 20/9/22.

1) $\det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -(1-1-2) - 2(3)(-1) = 2 + 6 = 8 \neq 0$

quindi M ha rango massimo uguale a 4.

2) a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$f(x,y,z) = (x+2y+z, x-y-z)$ è uguale a

$L(A)$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $rg(f) = rg(A) = 2$ quindi $\dim \operatorname{Im} f = 2$, e $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$, per il teorema della dimensione.

Poiché $\dim \operatorname{Im} f = 2$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, quindi qualunque base di $\mathbb{R}^2$, per esempio quella canonica, è una base per l'immagine. Per trovare una base di $\operatorname{Ker} f$, risolvo il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} & y=-\frac{2}{3}z \\ & x=-2y-z=\frac{4}{3}z-z=\frac{1}{3}z \end{aligned}$$

soluzione generale $\left(\frac{1}{3}z, -\frac{2}{3}z, z\right)$, una base è costituita da $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ oppure $(1,-2,3)$.

c) f è suriettiva ma non iniettiva.

d) Siano $\mathcal{B}=(v_1, v_2, v_3)$, $\mathcal{B}'=(w_1, w_2)$ tali che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

$f(v_1)=w_1$, $f(v_2)=w_2$, $f(v_3)=0$. Perciò v_3 va preso nel nucleo: $v_3=(1,-2,3)$; posso prendere $v_1=e_1$, $v_2=e_2$, e allora $w_1=f(v_1)=\binom{1}{1}$, $w_2=f(v_2)=\binom{2}{-1}$.

3) $$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 0 & \alpha & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 1 & -2-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Distinguiamo i casi $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$.

Se $\alpha = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Sistema non compatibile.

Se $\alpha \neq 0$, α è pivot:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & -1 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\alpha & 2 \end{array}\right)$$

sistema compatibile di rango 3

In particolare se $\alpha = 1$ la matrice è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_3 = x_4 - 2$$

$$x_2 = x_3 - 3x_4 = x_4 - 2 - 3x_4 = -2x_4 - 2$$

$$x_1 = -x_2 - x_4 + 1 = 2x_4 + 2 - x_4 + 1 = x_4 + 3$$

Soluzione generale $(x_4+3, -2x_4-2, x_4-2, x_4) =$

$= x_4(1,-2,1,1) + \underbrace{(3,-2,-2,0)}_{\text{soluzione particolare}}$

Lo spazio delle soluzioni è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1, avente giacitura $W = \langle (1,-2,1,1) \rangle$.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice simmetrica di rango 1

a) $L(A): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è autoaggiunto perché A è simmetrica.

b) $p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2(3-x)$

Autovalori: $\lambda_1 = 0$ con $m_a(0) = 2$

$\lambda_2 = 3$ con $m_a(3) = 1$

$Aut(0)$: $x+y+z=0$; una base è formata da $(-1,0,1)$, $(-1,1,0)$

$Aut(3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

che ha soluzione $(1,1,1)$.

Base ortonormale diagonalizzante:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

$$\bar{v}_2 = (-1, 1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-1+\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ le colonne sono i vettori di una base ortonormale che diagonalizza A.