

# Speranza Matematica Condizionata

# Speranza Matematica Condizionata

- Obiettivo:

- ▶ estendere il concetto di probabilità condizionata  $P(A|B)$
- ▶ prima a quello di speranza condizionata a un evento  $E[X|B]$
- ▶ poi a quello di speranza condizionata a una  $\sigma$ -algebra

$$E[X|\mathcal{G}]$$

$\mathcal{G}$  = informazione

- ▶ in particolare, speranza condizionata a una o più variabili aleatorie

$$E[X|Y_1, \dots, Y_n]$$

- ▶ collegamento con la legge condizionata

# Speranza Matematica Condizionata

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità,  $B \in \mathcal{F}$  con  $P(B) > 0$ ,  $X$  va tale che  $X \in L^1$  o  $X \geq 0$   
si definisce

$$E[X|B] = \frac{E[X; B]}{P(B)}$$

dove per convenzione  $E[X; B] = \int_B X dP = E[X1_B]$

- ▶ se  $A \in \mathcal{F}$ ,  $P(A|B) = E[1_A|B]$
- ▶ ricordiamo che  $P_B(A) = P(A|B)$  è una probabilità su  $(\Omega, \mathcal{F})$ ; riesce

$$E[X|B] = E_{P_B}[X]$$

dove  $E_{P_B}$  = speranza sotto la probabilità  $P_B$

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata (a un evento)
  - ▶ tutte le proprietà di una speranza (non condizionata)
  - ▶ se  $X$  indipendente da  $B$ ,  $E[X|B] = E[X]$
  - ▶ [disintegrabilità (I)]  $(B_i)_i \subset \mathcal{F}$  partizione discreta di  $\Omega$

$$E[X] = \sum_{i: P(B_i) > 0} P(B_i) E[X|B_i]$$

- ▶ [disintegrabilità (II)]  $Y$  va discreta con determinazioni  $y_1, \dots, y_n, \dots$

$$E[X] = \sum_{i: P(Y=y_i) > 0} P(Y=y_i) E[X|Y=y_i]$$

- L'ultima proprietà non può essere utilizzata con  $Y$  va continua!

## Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. Lancio di due dadi,  $X_1, X_2$  risultato del primo e secondo dado,  $Z = X_1 + X_2$ ,  $U = \min\{X_1, X_2\}$ ,  $V = \max\{X_1, X_2\}$ ; calcolare

$$E[X_1|Z = i], \quad i = 2, \dots, 12$$

$$E[U|V = i], \quad i = 1, \dots, 6$$

- Esercizio. Una portafoglio di rischi è classificato in *buoni* (20%), *normali* (45%), *mediocri* (35%); il danno atteso per sinistri buoni, normali e mediocri è rispettivamente 500€, 750€ e 1500€. Calcolare il danno atteso per un rischio estratto a caso dal portafoglio.

# Speranza Matematica Condizionata

- [Speranza condizionata - Teorema di Kolmogorov]  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità,  $X \in L^1$ ,  $\mathcal{G}$ -sigma algebra con  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ; esiste una va  $Z$  su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tale che

①  $Z$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile

②  $Z \in L^1$

③ per ogni  $A \in \mathcal{G}$

$$E[Z; A] = E[X; A]$$

inoltre  $Z$  è **unica**: se  $Z'$  è una va che soddisfa (1), (2), (3), allora  $Z = Z'$  q.c.

- $Z = E[X|\mathcal{G}]$  è la **speranza condizionata di  $X$  all'informazione in  $\mathcal{G}$**

# Speranza Matematica Condizionata

- Osservazioni

- ▶ [caso nonnegativo] il teorema vale per  $X \geq 0$  q.c. con (2) sostituita da  $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$  q.c.

- ▶ [medie parziali (I)] la proprietà (3) può essere scritta come

$$E[E[X|\mathcal{G}]|A] = E[X|A] \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{G}$$

- ▶ [medie parziali (II)] (3) può essere sostituita da

$$E[E[X|\mathcal{G}]Y] = E[XY]$$

per ogni  $Y$   $\mathcal{G}$ -misurabile tale che le speranze esistono

- ▶ [probabilità condizionata a una  $\sigma$ -algebra] per  $A \in \mathcal{F}$

$$P(A|\mathcal{G}) = E[1_A|\mathcal{G}]$$

# Speranza Matematica Condizionata

- Osservazioni

- ▶ se  $\mathcal{G} = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  allora la notazione è

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X|Y_1, \dots, Y_n]$$

speranza condizionata di  $X$  all'osservazione di  $Y_1, \dots, Y_n$

- ▶ esiste una funzione  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}$  misurabile tale che

$$E[X|Y_1, \dots, Y_n] = h(Y_1, \dots, Y_n)$$

e si usa la notazione

$$h(y_1, \dots, y_n) = E[X|Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n]$$

curva di regressione di  $X$  su  $Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n$

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata:  $X, Y \in L^1$ ,  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebra con  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

▶ [informazione triviale]  $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X]$  q.c.

▶ [linearità] per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = \alpha E[X|\mathcal{G}] + \beta E[Y|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

▶ [monotonia] se  $X \leq Y$  q.c. allora

$$E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata:  $X, Y \in L^1$ ,  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebra con  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

- ▶ [misurabilità=costanza] se  $XY \in L^1$  e  $Y$ - $\mathcal{G}$  misurabile

$$E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

e in particolare

$$E[Y|\mathcal{G}] = Y \text{ q.c.}$$

- ▶ [proprietà iterativa] se  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$

$$E[E[X|\mathcal{H}|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

in particolare [media della media condizionata=media]

$$E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X] \text{ q.c.}$$

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
  - ▶ [disuguaglianza di Jensen]  $I$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convessa,  $\mathcal{B}_I/\mathcal{B}$  misurabile  
 $X$  va,  $X \in I$  q.c. con  $f(X) \in L^1$   
allora  $X \in L^1$

$$f(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[f(X)|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

- ▶ [contrazione] se  $p \geq 1$  e  $X \in L^p$  allora  $E[X|\mathcal{G}] \in L^p$  e

$$E[|E[X|\mathcal{G}]|^p] \leq E[|X|^p]$$

- ▶ [indipendenza] se  $X \in L^1$  indipendente da  $\mathcal{G}$  allora

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X] \text{ q.c.}$$

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
  - ▶ [teorema di Fubini]  $X, Y$  va con  $Y$   $\mathcal{G}$ -misurabile  
 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{B}^2/\mathcal{B}$  misurabile tale che  $g(X, Y) \in L^1$

$$E[g(X, Y)|\mathcal{G}] = E[g(X, y)|\mathcal{G}]|_{y=Y}$$

se  $X$  è anche indipendente da  $\mathcal{G}$

$$E[g(X, Y)|\mathcal{G}] = E[g(X, y)]|_{y=Y}$$

# Speranza Matematica Condizionata

- per  $X, Y \in L^p$  ( $p \geq 1$ ) si pone

$$\|X\|_p = E[|X|^p]^{1/p} \quad \text{lunghezza di } X$$
$$d_p(X, Y) = \|X - Y\|_p \quad \text{distanza tra } X \text{ e } Y$$

identificando  $X$  con  $Y$  se  $X = Y$  q.c.

Nel caso  $p = 2$  si pone

$$\langle X, Y \rangle = E[XY] \quad \text{prodotto scalare di } X \text{ e } Y$$

e  $X$  è **ortogonale** a  $Y$  se  $\langle X, Y \rangle = 0$ ; quando una delle variabili ha media nulla, **ortogonalità=non correlazione**

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata:  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebra con  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 
  - ▶ [proiezione ortogonale] se  $X, Y \in L^2$

$X - E[X|\mathcal{G}]$  è ortogonale a  $Y$

- ▶ [miglior predittore] se  $X \in L^2$ ,  $E[X|\mathcal{G}]$  è l'unica soluzione del problema

$$\min_{Y \text{ } \mathcal{G}\text{-misurabile}} d_2(X, Y)$$

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
  - ▶ [speranza condizionata a un evento (I)] se  $A \neq \emptyset$  è un atomo di  $\mathcal{G}$ , cioè

$$\text{se } B \in \mathcal{G}, B \subset A \Rightarrow B = \emptyset \text{ o } B = A$$

e inoltre  $P(A) > 0$ , allora

$$E[X|\mathcal{G}]1_A = E[X|A]1_A \text{ q.c.}$$

quindi  $E[X|\mathcal{G}]$  è costante su  $A$  ed uguale a  $E[X|A]$

- ▶ [speranza condizionata a un evento (II)] se  $Y_1, \dots, Y_n$  sono v.a. e  $y_1, \dots, y_n$  con

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) > 0$$

allora su  $\{Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n\}$

$$E[X|Y_1, \dots, Y_n] = E[X|Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n]$$

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
  - ▶ [partizione]  $\mathbb{P} = (A_i)_i \subset \mathcal{F}$  partizione discreta di  $\Omega$ ,  $\mathcal{G} = \sigma(\mathbb{P})$

$$E[X|\mathcal{G}] = \sum_{i: P(A_i) > 0} 1_{A_i} E[X|A_i] \text{ q.c.}$$

mentre su ogni  $A_i$  con  $P(A_i) = 0$  si può definire  $E[X|\mathcal{G}]$  arbitrariamente

# Speranza Matematica Condizionata

- Dato un vettore di va

$$X = [X_1, \dots, X_n]^T = \underbrace{[X_1, \dots, X_m]}_{=X'} \underbrace{[X_{m+1}, \dots, X_n]}_{=X''}^T$$

con fdp congiunta  $f_X$  e fdp marginale di  $X''$   $f_{X''}$   
la **densità condizionata** di  $X'$  a  $X'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$  è

$$f_{X'|X''}(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)}{f_{X''}(x_{m+1}, \dots, x_n)}$$

se  $f_{X''}(x_{m+1}, \dots, x_n) > 0$ , 0 altrimenti

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della distribuzione condizionata

- ▶ per ogni  $(x_{m+1}, \dots, x_n)$  con  $f_{X''}(x_{m+1}, \dots, x_n) > 0$

$$f_{X'|X''}(\cdot | x_{m+1}, \dots, x_n)$$

è una pdf

- ▶ congiunta di  $(X', X'') =$  marginale di  $X''$  + condizionata  $X'|X''$
- ▶ [speranza e legge condizionata] per ogni  $(x_{m+1}, \dots, x_n)$  con  $f_{X''}(x_{m+1}, \dots, x_n) > 0$  e ogni  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{B}^m/\mathcal{B}$  misurabile tale che  $g(X') \in L^1$

$$E[g(X') | X'' = x''] = \int_{\mathbb{R}^m} g(x') f(x' | x'') dx'$$

# Speranza Matematica Condizionata

- **Varianza e covarianza condizionata**; per  $X, Y \in L^2$

- ▶ varianza di  $X$  condizionata all'informazione in  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned}\text{VAR}[X|\mathcal{G}] &= E[(X - E[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}] \\ &= E[X^2|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]^2 \geq 0 \quad \text{q.c.}\end{aligned}$$

- ▶ covarianza di  $X$  e  $Y$  condizionata all'informazione in  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned}\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}] &= E[(X - E[X|\mathcal{G}])(Y - E[Y|\mathcal{G}]|\mathcal{G}] \\ &= E[XY|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]E[Y|\mathcal{G}]\end{aligned}$$

# Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della varianza/covarianza condizionata:  $X, Y, Z \in L^2$ 
  - ▶ [simmetria]

$$\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}] = \text{COV}[Y, X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

- ▶ [varianza e covarianza]

$$\text{VAR}[X|\mathcal{G}] = \text{COV}[X, X|\mathcal{G}]$$

- ▶ [bilinearità] se  $A, B, C$  sono  $\mathcal{G}$  misurabili tali che tutte le speranze sono finite

$$\text{VAR}[AX + B|\mathcal{G}] = A^2 \text{VAR}[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

$$\text{COV}[AX + BY + C, Z|\mathcal{G}] = A \text{COV}[X, Z|\mathcal{G}] + B \text{COV}[Y, Z|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

- ▶ [covarianza "between" e "within"]

$$\text{VAR}[X] = E[\text{VAR}[X|\mathcal{G}]] + \text{VAR}[E[X|\mathcal{G}]] \text{ q.c.}$$

$$\text{COV}[X, Y] = E[\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}]] + \text{COV}[[E[X|\mathcal{G}], E[Y|\mathcal{G}]]] \text{ q.c.}$$

# Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. Lanciando una moneta la probabilità di testa è  $V \sim U(0, 1)$ ; si lancia la moneta  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$  volte; sia  $X$  il numero di teste; calcolare

- 1  $E[X|N, V]$
- 2  $E[X|N]$
- 3  $E[X|V]$
- 4  $E[X]$
- 5  $\text{VAR}[X|N, V]$
- 6  $\text{VAR}[X|N]$
- 7  $\text{VAR}[X]$
- 8  $\text{COV}[X, V|N]$
- 9  $\text{COV}[X, N|V]$

## Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. Si sceglie a caso un punto  $U_1$  nell'intervallo  $(0,1)$ ; per  $n \geq 1$ , dato  $U_n$ , si sceglie a caso un punto  $U_{n+1}$  su  $(0, U_n)$ . Dimostrare che la successione  $U_n$  converge q.c. a 0
- Esercizio. [distribuzione composta] Il numero di sinistri in un portafoglio è  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ; l'ammontare dell' $i$ -esimo sinistro è  $X_i$ ; le va

$$X_1, \dots, X_n, \dots$$

sono indipendenti e identicamente distribuite (iid) con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ , e indipendenti da  $N$ ; il danno totale è

$$S = X_1 + \dots + X_N$$

Calcolare  $E[S]$ ,  $\text{VAR}[S]$ ,  $\text{COV}[S, N]$ .