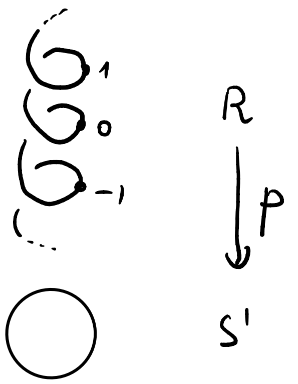
Lezione 18

Esempio fondamentale $\quad S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

$p : \mathbb{R} \to S^1$, $\quad p(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) = e^{2\pi i t}$



<u>p è rivestimento</u>, $\quad p^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

$V_0 =]0,1[$, $\quad V_0' =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$U = p(V_0) = S^1 - \{1\}$, $\quad U' = p(V_0') = S^1 - \{-1\}$

aperti in S^1, $\quad S^1 = U \cup U'$, $\quad U \cong U' \cong \mathbb{R}$ Proiez. stereografica

Basta far vedere che U e U' sono banalizzanti

p periodica di periodo 1 $\Rightarrow$ $p^{-1}(U) = V_0 + \mathbb{Z} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$

$V_j = j + V_0 =]j, j+1[$, $\forall j \in \mathbb{Z}$

$p_j = p|_{V_j} : V_j \to U$ continua e biiettiva, $V_j \cong \mathbb{R} \cong U \overset{\text{lemma}}{\Longrightarrow}$

p_j omeo $\forall j \in \mathbb{Z}$. In modo simile per $V_j' = j + V_0' =]-\frac{1}{2}+j, \frac{1}{2}+j[$.

Altri esempi

$p_n : S^1 \to S^1$ $\quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Le inverse loc. sono le radici n-esime

$z \mapsto z^n$

Gli aperti U, U' di prima sono banalizzanti. Vediamo $p^{-1}(U)$.

In coordinate angolare θ, $\quad p_n(\theta) = n\theta \pmod{2\pi}$

$V_j =]\frac{2\pi j}{n}, \frac{2\pi(j+1)}{n}[\subset S^1$, $\quad j = 0, \dots, n-1$

$p_{n,j} : V_j \to U =]0, 2\pi[$

$p_{n,j}(\theta) = n\theta \pmod{2\pi}$ $\qquad p_n$ ha n fogli

Def Un rivestimento $p: Y \to X$ è detto:

i) connesso/cpa se Y è connesso/cpa ($\Rightarrow X$ connesso/cpa)

ii) finito se p ha un numero finito di fogli.

p_n è connesso (per archi) e finito

$p: \mathbb{R} \to S^1$ è connesso (per archi) e infinito.

Lemma del numero di Lebesgue Sia (X,d) uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di X. Allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, S \subset X$, $\operatorname{diam} S < \delta \Rightarrow \exists\, \alpha \in A$ t.c. $S \subset U_\alpha$.

Dim 1° caso) $\exists\, \alpha \in A$ t.c. $U_\alpha = X \rightsquigarrow \delta = 1$.

2° caso) $U_\alpha \neq X\ \forall \alpha \in A \rightsquigarrow \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito.

$K_i := X - U_{\alpha_i} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$. $K_i \subset X$ chiuso $\Rightarrow K_i$ compatto $\forall i$.

$$\varphi: X \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, K_i) \quad \underline{\text{distanza media}}.$$

$\forall\, x \in X\ \exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ t.c. $x \in U_{\alpha_i} \Rightarrow x \notin K_i \Rightarrow d(x, K_i) > 0$

$\Rightarrow \varphi(x) > 0\ \forall x \in X \Rightarrow \delta := \min \varphi > 0$. $\forall\, S \subset X$, $\operatorname{diam} S < \delta$

$\Rightarrow S \subset B(s;\delta)$, per un certo $s \in S \Rightarrow \exists\, i$ t.c. $\delta \leq \varphi(s) \leq d(s, K_i)$

$\Rightarrow B(s;\delta) \cap K_i = \emptyset \Rightarrow S \subset B(s;\delta) \subset X - K_i = U_{\alpha_i}$.

Sollevamento dei cammini

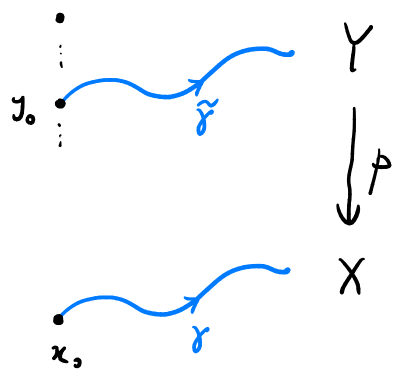
Def Sia $p: Y \to X$ un rivestimento e sia $f: Z \to X$ continua, con Z spazio arbitrario. Un'applicazione continua $\tilde{f}: Z \to Y$ è detta sollevamento di f tramite p se $f = p \circ \tilde{f}$.
Se $\tilde{f}$ esiste si dice che f è sollevabile.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Se $\gamma : I \to X$ è un cammino con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$, un sollevamento è un cammino $\tilde{\gamma} : I \to Y \Rightarrow \gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ con $\tilde{\gamma}(0) = y_0 \in p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{\gamma}(1) = y_1 \in p^{-1}(x_1)$.

Teorema di sollevamento dei cammini

Sia $p: Y \to X$ un rivestimento e sia $\gamma : I \to X$ un cammino con $\gamma(0) = x_0 \in X$. Allora $\forall\, y_0 \in p^{-1}(x_0)$ $\exists !\, \tilde{\gamma} : I \to Y$ sollevamento di γ t.c. $\tilde{\gamma}(0) = y_0$.



Dim J fibra di p

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto banalizzante di X.

$p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{j \in J} V_{\alpha,j}$, $V_{\alpha,j} \subset Y$ aperto

$$p_{\alpha,j} := p|_{V_{\alpha,j}} : V_{\alpha,j} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \text{ omeo } \forall\, j \in J,\ \forall\, \alpha \in A$$

$\mathcal{W} = \{W_\alpha = \gamma^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $I = [0,1]$ spazio metrico compatto
$\rightsquigarrow$ $\delta > 0$ numero di Lebesgue per $\mathcal{W}$ $\rightsquigarrow$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$$

suddivisione di I in intervalli $[t_{i-1}, t_i]$ t.c. $t_i - t_{i-1} < \delta$ $\forall\, i$
$\Rightarrow \forall\, i \in \{1, \dots, k\}$ $\exists\, \alpha_i \in A$ t.c. $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\alpha_i}$.

<u>Sollevamento ricorsivo</u> costruiamo $\tilde{\gamma}_i : [0, t_i] \to Y$ sollevamento di γ su $[0, t_i]$, $\forall i = 0, \dots, 1$, t.c. $\tilde{\gamma}_i(0) = y_0$, $\tilde{\gamma}_i$ estensione di $\tilde{\gamma}_{i-1}$.

Poniamo $\tilde{\gamma}_0 : \{0\} \to Y$, $\tilde{\gamma}_0(0) = y_0$.

Supponiamo di aver costruito $\tilde{\gamma}_{i-1} : [0, t_{i-1}] \to Y$ e costruiamo $\tilde{\gamma}_i$, $i \geq 1$.

$\gamma(t_{i-1}) \in U_{\alpha_i} \Rightarrow \exists!\, j_i \in J$ t.c. $\tilde{\gamma}_{i-1}(t_{i-1}) \in V_{\alpha_i, j_i}$

Definiamo $\tilde{\gamma}_i : [0, t_i] \to Y$ nel modo seguente:

$$\tilde{\gamma}_i(t) := \begin{cases} \tilde{\gamma}_{i-1} & \text{se } t \in [0, t_{i-1}] \\ p^{-1}_{\alpha_i, j_i}\big(\gamma(t)\big) & \text{se } t \in [t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

$\tilde{\gamma}_i$ è ben definita e continua per (1) e (2):

1) $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\alpha_i}$ e $p^{-1}_{\alpha_i, j_i} : U_{\alpha_i} \xrightarrow{\cong} V_{\alpha_i, j_i}$ (quindi ha senso)

2) $p^{-1}_{\alpha_i, j_i}(\gamma(t_{i-1})) \in V_{\alpha_i, j_i} \cap p^{-1}(\gamma(t_{i-1})) = \{\tilde{\gamma}_{i-1}(t_{i-1})\} \Rightarrow$

$$p^{-1}_{\alpha_i, j_i}(\gamma(t_{i-1})) = \tilde{\gamma}_{i-1}(t_{i-1})$$

$\tilde{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_{i-1}$ su $[0, t_{i-1}] \Rightarrow \tilde{\gamma}_i(0) = y_0$

$\tilde{\gamma}_i$ sollevamento di γ, infatti su $[0, t_{i-1}]$ è vero per l'ipotesi induttiva mentre su $[t_{i-1}, t_i]$ segue subito dal fatto che

$$p \circ p^{-1}_{\alpha_i, j_i} = id_{U_{\alpha_i}}$$

L'esistenza del sollevamento si ha ponendo $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_k$

L'unicità segue dal fatto che per ogni $i = 0, \dots, 1$ la costruzione precedente è unica dato che $[t_{i-1}, t_i]$ è connesso quindi la sua immagine con un certo sollevamento deve essere contenuta in un unico V_{α_i, j_i} perché $p^{-1}(U_{\alpha_i}) = \bigsqcup_{j \in J} V_{\alpha_i, j}$.